Normalfördelning och Poissonfördelning för bestämning av säkerhetslager

Stig-Arne Mattsson

Sammanfattning

För att kunna dimensionera beställningspunkter och säkerhetslager baserade på en målsatt servicenivå är det nödvändigt att vid beräkningarna utgå från hur efterfrågan varierar över tiden, dvs från hur efterfrågefördelningen ser ut. Traditionellt har detta åstadkommits genom att anta att efterfrågevariationerna följer någon form av standardiserad efterfrågefördelning, vanligtvis en normalfördelning eller en Poissonfördelning. Den studie som redovisas i denna rapport syftar till att belysa när respektive av dessa två fördelningar är användbara som modeller för verkliga efterfrågefördelningar och vad det betyder att använda dem under olika omständigheter. I första hand är målsättningen att åstadkomma praktiskt användbara riktlinjer som ligger inom ramen för de felmarginaler som gäller i övrigt vid lagerstyrning.

De resultat som erhållits kan översiktligt sammanfattas enligt följande. Normalfördelning kan användas om variationerna i efterfrågan under ledtid är små eller måttliga, dvs. har en variationskoefficient som är mindre än storleksordningen 0,6. Poissonfördelning kan användas om standardavvikelsen är lika med roten ur medelefterfrågan under ledtid +/- 20 %.

Vid låg efterfrågan och liten efterfrågevariation blir beställningspunkter beräknade med normalfördelning ungefär lika stora som beställningspunkter beräknade med Poissonfördelning. Vid låg efterfrågan och stor efterfrågevariation samt vid hög efterfrågan och liten efterfrågevariation blir beställningspunkter beräknade med normalfördelning större än beställningspunkter beräknade med Poissonfördelning. Vid hög efterfrågan och stor efterfrågevariation blir beställningspunkter beräknade med normalfördelning mycket större än beställningspunkter beräknade med Poissonfördelning. Användning av normalfördelning för att dimensionera beställningspunkter när efterfrågan är Poissonfördelad leder till högre servicenivåer än avsett.

Om beställningspunkter dimensioneras med hjälp av Poissonfördelning vid normalfördelad efterfrågan får man vid stora standardavvikelser betydligt lägre servicenivåer än avsett och vid små standardavvikelser betydligt högre servicenivåer än avsett. För efterfrågefördelningar som slumpgenererats så att de i möjligaste mån liknar verkligt förekommande fördelningar blir beställningspunkter beräknade med utgångspunkt från ett normalfördelningsantagande högre än om de beräknas med utgångspunkt från ett Poissonfördelningsantagande.

Teknisk Logistik stig-arne.mattsson@swipnet.se
Lunds Universitet
Mars, 2003

1 Inledning

1.1 Bakgrund

Materialstyrning innebär förenklat att avgöra när nya beställningar för att fylla på lager skall göras och inleveranser ske. Materialstyrning innefattar också att avgöra hur stora de kvantiteter som beställs bör vara. Som stöd för att fatta beslut i de här avseendena används olika materialstyrningsmetoder. Syftet med att använda dessa materialstyrningsmetoder är att uppnå så låg kapitalbindning i lager som möjligt samtidigt som kostnaderna för att genomföra beställningar och inleveranser är låga och så att bristsituationer i möjligaste mån kan undvikas. En av de materialstyrningsmetoder som används för detta ändamål är det så kallade beställningspunktssystemet. Metodiken utvecklades under tidigt 1900-tal och är den idag tillsammans med materialbehovsplanering mest använda materialstyrningsmetoden i svensk industri.

1.2 Problemdiskussion

Det traditionella beställningspunktssystemet bygger på att aktuellt lagersaldo jämförs med en så kallad beställningspunkt. Denna beställningspunkt avser en kvantitet som motsvarar förväntad förbrukning under återanskaffningstiden plus en säkerhetslagerkvantitet som gardering mot den osäkerhet som alltid föreligger vid uppskattning eller prognostisering av framtida förbrukning. För höga beställningspunkter medför för stora lager och för låga beställningspunkter oekonomiskt många bristsituationer. Att bestämma beställningspunkter är alltså till stor del en fråga om att väga lagerhållningskostnader mot bristkostnader så att summan av dem blir så liten som möjligt.

För att på ett rimligt optimalt sätt kunna göra en avvägning mellan lagerhållningskostnader och bristkostnader måste säkerhetslagerdelen av beställningspunkten fastställas med utgångspunkt från uppskattade bristkostnader per styck. Eftersom bristkostnader i regel är svåra att uppskatta åstadkoms denna avvägning i praktiken i stället med utgångspunkt från en policybestämd servicenivå som uttrycker någon form av förväntad sannolikhet att kunna leverera direkt från lager när behov uppstår eller kundorder erhålls. Vare sig man använder sig av bristkostnadsuppskattningar eller fastställda servicenivåer för att dimensionera säkerhetslagret är det nödvändigt att basera beräkningarna på hur efterfrågan varierar över tiden, dvs. på hur efterfrågefördelningen ser ut. Traditionellt har detta åstadkommits genom att anta att efterfrågevariationerna följer någon form av standardiserad efterfrågefördelning, vanligtvis en normalfördelning eller en Poissonfördelning. Även andra fördelningar har kommit till användning.

Den fråga man ställs inför i det här sammanhanget är vilken fördelning man bör välja i en konkret situation för dimensionering av beställningspunkter. Resonemanget leder fram till den första forskningsfrågan.

- Under vilka förhållanden är det rimligt att utgå från normalfördelad efterfrågan respektive Poissonfördelad efterfrågan vid bestämning av beställningspunkter?

I litteraturen finns det delade meningar om hur betydelsefullt valet av fördelning är. Utifrån ett mer praktiskt perspektiv argumenterar Wilkingson (1996, sid 239) för att val av efterfrågefördelning har mindre betydelse och att ”irrespective of volume and variability it is valid to assume a normal distribution”. Silver och Peterson (1985, sid 289) menar att de fel som begås genom att använda normalfördelning är små i jämförelse med andra inslag av osäkerheter vid dimensionering och användning av beställningspunkter. I motsats till detta hävdar Lau (1989, sid 99) att om man använder en normalfördelning och den verkliga efterfrågefördelningen inte är normal kommer man att få stora skillnader mellan beräknat och optimalt säkerhetslager och stora skillnader i erhållen servicenivå jämfört med önskad. Zotteri (2000, sid 32) menar att betydelsen av att välja rätt efterfrågefördelning är speciellt viktig ju högre servicenivå man vill ha. Skillnaderna i erforderlig lagerstorlek är då starkt beroende av vald fördelning. En liknande uppfattning redovisas också av Bookbinder och Lordahl (1989, sid 302). Det är mot denna bakgrund av intresse att ytterligare klara ut hur betydelsefullt valet av efterfrågefördelning är och i vilka sammanhang det är betydelsefullt. Detta resonemang leder till den andra forskningsfrågan.

- Vad betyder det att vid dimensionering av beställningspunkter använda normalfördelning i stället för Poissonfördelning och tvärtom?

1.3 Syfte och avgränsningar

Syftet med det forskningsprojekt som redovisas i denna rapport är att belysa när normalfördelningen respektive Poissonfördelningen är användbar som modell för verkliga efterfrågefördelningar vid dimensionering av säkerhetslager och vad det betyder att använda dem under olika omständigheter. I första hand är målsättningen att åstadkomma praktiskt användbara riktlinjer som underlag för dimensionering och som ligger inom ramen för de felmarginaler som gäller i övrigt.

Dimensionering av säkerhetslager påverkas inte endast av variationer i efterfrågan utan även av variationer i ledtider för lagerpåfyllning. Detta inslag av osäkerhet behandlas emellertid inte här. Ledtiden antas vara konstant och känd.

Av förekommande fördelningar för att beskriva efterfrågevariationer har i den här studien endast normalfördelning och Poissonfördelning behandlats. Detta innebär inte att alla andra fördelningar är oanvändbara eller ens ointressanta. Skälet till att endast inkludera normalfördelning och Poissonfördelning är dels att begränsa studiens omfattning men framför allt att det praktiskt taget endast är dessa två som används i industrin. Den teoretiska svårighetsgrad som det innebär att använda normalfördelning eller Poissonfördelning för att dimensionera säkerhetslager är i nuläget hög nog med avseende på vad som kan förväntas vara möjligt att tillämpa i praktiken.

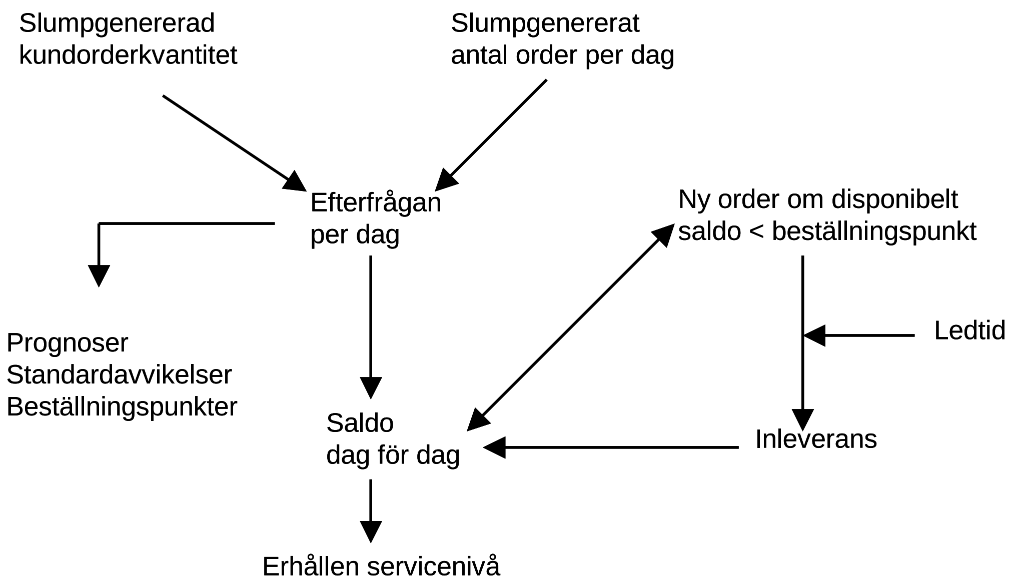
Vid analysen av vad val av efterfrågefördelning betyder har lagerstyrning med hjälp av beställningspunkter använts. Den påverkan på styrningseffektiviteten som val av efterfrågefördelning har gäller säkerhetslagerdelen av beställningspunkten. De resultat och slutsatser som framkommer i studien är därför även tillämpliga vid användning av andra lagerstyrningsmetoder, exempelvis förbrukningsersättande lagerstyrningssystem och täcktidsplanering.

2 Angreppssätt och simuleringsmodell

För att belysa när normalfördelning respektive och Poissonfördelning är användbar som modell för verkliga efterfrågefördelningar vid dimensionering av säkerhetslager och vad det betyder att använda dem under olika omständigheter har tre olika angreppssätt använts. Ett naturligt första angreppssätt är att studera vilka riktlinjer och rekommendationer för val av fördelning som finns beskrivna i litteraturen. En genomgång av litteraturen i detta avseende redovisas i avsnitt 3.

Betydelsen av att välja den ena av de båda fördelningarna när efterfrågans variation motsvarar den andra har studerats genom att göra jämförelser baserade på teoretiska beräkningar. Dessa jämförelser omfattar skillnader i beställningspunkter beräknade med respektive fördelning samt skillnader i de servicenivåer som erhålls när den ena fördelningen använts för dimensionering medan det egentligen varit fråga om den andra. Dessa beräkningar och resultaten från dem redovisas i avsnitt 4.

För att komplettera den teoretiska analysen med jämförelser baserade på efterfrågefördelningar som kan förväntas likna i verkligheten förekommande fördelningar har ett tredje angreppssätt använts. Efterfrågefördelningar har genererats med hjälp av slumptal och analysen bygger på simulering av förbrukning, beställningar och inleveranser med utgångspunkt från dessa fördelningar. Simuleringarna har genomförts med hjälp av Excel. En översiktlig illustration av simuleringsmodellen visas i figur 1.



Figur 1 Översikt över den använda simuleringsmodellen

3 Riktlinjer i litteraturen för val av efterfrågefördelning

Frågan om val av lämplig fördelning för att karakterisera efterfrågan har i viss utsträckning behandlats i litteraturen. De riktlinjer för att avgöra om en verklig efterfrågefördelning kan approximeras med en normal- eller en Poissonfördelning och som finns publicerade redovisas i detta avsnitt.

3.1 Normalfördelning

Den efterfrågefördelning som är mest använd både i litteraturen och vid lagerstyrning i praktiken är normalfördelningen. Orsaken till detta är att normalfördelningen i allmänhet ganska väl återspeglar i verkligheten förekommande efterfrågefördelningar eftersom efterfrågevariationerna under ledtiden kan betraktas som sammansatta av flera oberoende slumpmässigt inträffade händelser som adderas. Det har också visats att mervärdet av att använda andra fördelningar är litet, speciellt om man beaktar andra förenklande antaganden som görs vid beställningspunktsberäkning (Se exempelvis Naddor, 1978 och Fortuin, 1980). Dessutom är normalfördelningen från beräkningssynpunkt mycket attraktiv att använda.

Användning av normalfördelning är emellertid också förknippad med vissa nackdelar. Normalfördelningen är en kontinuerlig fördelning medan verklighetens efterfrågefördelningar är diskreta. Detta innebär att efterfrågan under ledtid enligt normalfördelningen inte behöver vara ett helt tal. Är efterfrågan stor är detta inte något praktiskt problem. Avrundningen av beräknade beställningspunkter till hela tal ger försumbara fel. Är efterfrågan däremot liten blir approximationen inte försumbar. Det kan också tilläggas att vid användning av normalfördelning kan efterfrågan teoretiskt sett bli negativ vilket saknar relevans i praktiken. Dessa negativa värden påverkar beräkningen. Om efterfrågans medelvärde är stort i förhållande till standardavvikelsen är sannolikheten för negativ efterfrågan emellertid liten och dess inverkan på beräkningarna försumbar.

För att testa om en verklig efterfrågefördelning motsvarar normalfördelningen kan ett antal alternativa tillvägagångssätt användas. Det mest korrekta sättet är att göra ett så kallat χ^2–test som dessutom möjliggör att statistiskt värdera signifikansnivån för överensstämmelsen mellan den faktiska efterfrågefördelningen och normalfördelningen. Användning av χ^2–test kräver emellertid förhållandevis avancerade beräkningar. Hax och Candea (1984, sid 182) varnar för överdriven användning av avancerade metoder för att testa överensstämmelse mellan verklig fördelning och en standardfördelning. De betvivlar värdet av sådana tester i förhållande till den komplexitet de innebär och de beräkningskostnader de medför. Tillvägagångssättet kan enligt författarna endast motiveras för extremt dyra och viktiga artiklar.

Normalfördelningen är en symmetrisk funktion där cirka 68,3 % av alla värden faller inom +/- 1 standardavvikelse från medelvärdet, cirka 95,5 % inom +/- 2 standardavvikelser från medelvärdet och 99.7 % inom +/- 3 standardavvikelser. Denna egenskap kan användas för att på ett enklare sätt avgöra om en fördelning är normalfördelad. Tillvägagångssättet innebär att man beräknar andelen gånger som efterfrågan under ledtid varit inom +/- 1, +/- 2 och +/- 3 standardavvikelser från medelefterfrågan. Om dessa andelar varit nära 68 %, 95 % respektive 99 % kan man på goda grunder anta att den verkliga efterfrågan är normalfördelad.

Ett annat enklare men också mer approximativt sätt att testa om en efterfrågevariation är normalfördelad har föreslagits av Fagan (1984). Enligt honom är det rimligt att anta att efterfrågan är normalfördelad om den är någorlunda jämt fördelad runt sitt medelvärde och om medelefterfrågan minskad med 1.7 gånger standardavvikelsen är större än noll. Testet innebär att om den beräknade skillnaden är mindre än noll så skulle med normalfördelning efterfrågan under ledtid vara negativ i mer än 10 % av fallen vilket ju uppenbarligen inte är rimligt.

Ytterligare några enkla regler för att avgöra när man kan anta att efterfrågan är normalfördelad har publicerats i litteraturen. Archibald (Se Silver – Peterson, 1985, sid 330) hävdar att normalfördelningen ger tillräcklig precision om medelefterfrågan under ledtid är större än 10 enheter. Denna rekommendation är baserad på ett stort antal genomförda tester. Andersson, Ljungfeldt och Wandel (1970, sid 106) har formulerat en liknande regel. De menar att villkoret för att använda normalfördelning på ett acceptabelt sätt är uppfyllt om medelefterfrågan under ledtiden är större än standardavvikelsen och dessutom större än 5. En ytterligare regel har formulerats av Schönsleben (2000, sid 415) som menar att man kan tillåta sig att utgå från normalfördelning om variationskoefficienten, dvs för hållandet mellan standardavvikelsen och medelvärdet är mindre än eller lika med 0.4.

Fagan	Normalfördelning om medelefterfrågan under ledtid > 1,7 * standardavvikelsen
Silver-Peterson	Normalfördelning om medelefterfrågan under ledtid > 10
Andersson m fl	Normalfördelning om - medelefterfrågan under ledtid > standardavvikelsen - medelefterfrågan under ledtid > 5
Schönsleben	Normalfördelning om medelefterfrågan under ledtid > 2,5 * standardavvikelsen

Figur 2 Sammanställning av regler för att avgöra om normalfördelning kan användas som modell för en verklig efterfrågefördelning

3.2 Poissonfördelning

I motsats till normalföredelningen är Poissonfördelningen en diskret fördelning. Den är helt definierad av sitt medelvärde, dvs en efterfrågefördelning som är Poissonfördelad är bestämd av medelefterfrågan under ledtid. Standardavvikelsen är lika med kvadratroten ut medelefterfrågan. Poissonfördelningen är en osymmetrisk funktion. Om medelefterfrågan under ledtid är 4 är sannolikheten för att efterfrågan inte skall överskrida 2 23.8 %, inte överskrida 3 43.3 %, inte överskrida 4 62.9 %, inte överskrida 5 78.5 %, inte överskrida 6 88.9 % och inte överskrida 7 94.9 %.

Poissonfördelningen har fördelen av att man inte behöver beräkna standardavvikelsen. Den är emellertid beräkningsmässigt inte lika lätt att använda som normalfördelningen. Tillgängliga tabeller för Poisssonfördelningar brukar inte heller innehålla medelvärden större än 25 vilket begränsar dess användbarhet till fall med låga efterfrågevärden.

I de fall efterfrågan under ledtiden kan antas vara Poissonfördelad kan beställningspunkten och säkerhetslagret beräknas på följande sätt (Se Guelzo, 1986, sid 155 och Shah, 1988, sid 375). I ett första steg beräknas beställningspunkten med hjälp av en Poissontabell över ackumulerade sannolikheter för att efterfrågan under ledtiden skall understiga olika kvantiteter. Utgångspunkten är en fastställd servicenivå definierad som sannolikheten att brist inte kommer att inträffa under en lagercykel. Den kvantitet för vilken den ackumulerade sannolikheten är närmast högre än denna servicenivå väljs som beställningspunkt. I nästa steg beräknas säkerhetslagret som skillnaden mellan beställningspunkten och medelefterfrågan under ledtid.

Poissonfördelningen används i första hand när efterfrågan under ledtid är låg. Exempelvis är den vanlig vid lagerstyrning av reservdelar.

Ett enkelt sätt att testa om efterfrågan är Poissonfördelad är att jämföra den beräknade standardavvikelsen med roten ur medelefterfrågan. Skillnaden mellan dessa båda tal skall vara noll om efterfrågefördelningen exakt motsvarar en Poissonfördelning. Även vid en viss måttlig skillnad är Poissonfördelningen användbar. Silver – Peterson (1985, sid 330) accepterar en felmarginal på +/- 10 % medan Axsäter (1991, sid 67) anser att +/- 20 % är tillräckligt. Villkoret för att använda Poissonfördelning blir då enligt Axsäter att $\sigma < 1.2 * \sqrt{d}$ och $> 0.8 * \sqrt{d}$, där d är efterfrågan under ledtid.

Om detta villkor inte är uppfyllt förordar Axsäter att man i allmänhet i stället använder normalfördelad efterfrågan. Inom statistik- och sannolikhetsteorilitteraturen anses ofta normalfördelningen kunna användas som approximation till Poissonfördelningen om fördelningens medelvärde är större än eller lika med fem (Se exempelvis Berenson och Levine, 1989, sid 277). Enligt Schönsleben (2000, sid 415) bör medelförbrukningen vara större än 9 för att Poissonfördelningen skall kunna approximeras med en normalfördelning.

4 Analytiska jämförelser mellan normal och Poissonfördelning

Som framgick av föregående avsnitt har ett antal riktlinjer tagits fram för att avgöra i vilka situationer som man kan använda respektive av normalfördelning och Poissonfördelning för att dimensionera beställningspunkter och säkerhetslager. Det finns emellertid inte publicerat några undersökningar som visar vad det betyder att använda den ena i stället för den andra i en konkret situation. För att studera denna frågeställning har en teoretisk jämförelse av de båda fördelningarna genomförts. Denna jämförelse omfattar en jämförelse av beställningspunkter beräknade med respektive fördelning samt av vilka servicenivåer som erhålls när den ena fördelningen använts för dimensionering medan det egentligen varit fråga om den andra.

4.1 Skillnader i beställningspunkter och säkerhetslager vid användning av olika fördelningar

För att studera skillnader i resultat vid dimensionering av beställningspunkter och säkerhetslager vid användning av normalfördelning alternativt Poissonfördelning har beräkningar för några olika typfall genomförts. Beräkningarna omfattar en efterfrågan under ledtid på 0.25, 0.5, 1, 2, 5, 10, 15, 20, 30, 40 respektive 50 stycken. För var och en av dessa efterfrågefördelningar har olika kombinationer av servicenivåer och variationskoefficienter tillämpats. Kombinationerna framgår av figur 3. Med variationskoefficient menas förhållandet mellan fördelningens standardavvikelse och dess medelvärde. Den utgör sålunda ett mått på efterfrågans relativa spridning.

Variations-koefficient	Servicenivå 80 %	90 %	95 %	97 %	99 %
0.2					
0.4					
0.6					
0.8					

Figur 3 Tillämpade kombinationer vid beräkning av beställningspunkter och säkerhetslager för olika efterfrågevärden

Vid beräkningarna har beställningspunkterna och säkerhetslagerna genomgående avrundats uppåt till hela tal, dvs. i princip så att önskad servicenivå minst uppnås. De erhållna resultaten kan sammanfattas enligt följande.

1. Skillnaderna mellan beställningspunkter beräknade med hjälp av normalfördelning och beställningspunkter beräknade med hjälp av Poissonfördelning blir större ju högre medelefterfrågan är. Detta gäller oavsett servicenivå och variationskoefficient. De enda undantagen gäller mycket låg medelefterfrågan och beror i dessa fall på avrundningseffekter.

2. Ju högre servicenivån är, desto större blir beställningspunkter beräknade med hjälp av normalfördelning i förhållande till de beställningspunkter som beräknats med hjälp av Poissonfördelning då medelefterfrågan är större än 15 stycken. Detta gäller oavsett variationskoefficient.

3. Ju högre variationskoefficienten är, desto större blir den beställningspunkt som beräknats med normalfördelning i förhållande till den som beräknats med Poissonfördelning.

4. Vid låg medelefterfrågan, upp till och med storleksordningen 5 stycken under ledtid, och låg variationskoefficient blir den beställningspunkt som beräknats med Poissonfördelning högre än den som beräknats med normalfördelning, speciellt vid servicenivåer på 95 % och högre.

5. Vid låg medelefterfrågan, upp till och med storleksordningen 2 stycken under ledtiden, och hög variationskoefficient blir beställningspunkter beräknade med normalfördelning och Poissonfördelning tämligen lika.

6. Vid hög medelefterfrågan, större än 15 stycken under ledtiden, och låg variationskoefficient blir den beställningspunkt som beräknats med Poissonfördelning lägre än den som beräknats med normalfördelning.

7. Vid hög medelefterfrågan, större än 15 stycken under ledtiden, och hög variationskoefficient blir den beställningspunkt som beräknats med Poissonfördelning mycket lägre än den som beräknats med normalfördelning.

8. Överensstämmelsen mellan de båda fördelningarna är, om man eliminerar avrundningseffekter, bäst när variationskoefficienten är nära 1 / √ medelefterfrågan, dvs för en medelefterfrågan på 15 – 30 stycken när variationskoefficienten är 0.2, för en medelefterfrågan på 5 – 10 stycken när variationskoefficienten är 0.4, för en medelefterfrågan på 2 – 5 när variationskoefficienten är 0.6 samt för en medelefterfrågan på 0.5 – 2 stycken när variationskoefficienten är 0.8. Detta förhållande hänger samman med att variationskoefficienterna i dessa fall nära motsvarar en standardavvikelse som är lika med Poissonfördelningens teoretiska standardavvikelse.

Principiellt gäller samma mönster för säkerhetslager som för beställningspunkter. Skillnaderna beror främst på att avrundningseffekterna blir väsentligen större för säkerhetslager än för beställningspunkter.

En intressant fråga i sammanhanget är om de erhållna skillnaderna har någon signifikant betydelse med avseende på de kostnader som är förknippade med val av beställningspunkt, dvs. summan av lagerhållningssärkostnader och bristkostnader. Om skillnaderna inte är signifikanta med avseende på dessa kostnader måste slutsatsen bli att val av efterfrågefördelning är av mindre betydelse.

En känslighetsanalys av storleken på beställningspunkten i ett beställningspunktssystem med avseende på summa lagerstyrningskostnader finns redovisad av Mattsson (2002). Enligt denna analys är storleken på beställningspunkten av stor betydelse för att åstadkomma optimala lagerstyrningskostnader när efterfrågan är hög under ledtiden, alldeles speciellt om beställningspunkterna blir för små i förhållande till vad som är kostnadsoptimalt. Detta är fallet då Poissonfördelningen används i stället för normalfördelning och medelefterfrågan under ledtid är stor och variationskoefficienten är stor.

4.2 Erhållen servicenivå vid dimensionering med respektive fördelning

Ett annat sätt att studera betydelsen av använd standardfördelning för att beskriva efterfrågan är att analysera vilka servicenivåer som erhålls om efterfrågefördelningen är en Poissonfördelning men säkerhetslagret dimensioneras med hjälp av en normalfördelning och omvänt. Med servicenivå avses här sannolikheten att inte råka ut för brist under en lagercykel, dvs det servicenivåbegrepp som brukar kallas SERV1. Standardavvikelsen för efterfrågevariationerna har i enlighet med Poissonfördelningen satts till roten ur medelefterfrågan.

Med avseende på de servicenivåer som teoretiskt erhålls när efterfrågan är Poissonfördelad och beställningspunkterna dimensionerats med hjälp av ett normalfördelningsantagande kan följande slutsatser dras från de genomförda beräkningarna.

1. Ju högre medelefterfrågan är, desto lägre blir den teoretiskt erhållna servicenivån. Speciellt är skillnaderna mycket stora för de lägre servicenivåalternativen.

2. I samtliga fall blir den teoretiskt erhållna servicenivån högre än den som använts vid dimensionering med hjälp av normalfördelning. Med andra ord leder användning av normalfördelning när den verkliga fördelningen är Poisson till högre servicenivåer än vad som avsetts. För låga målsatta servicenivåer blir de avsevärt högre.

3. För de högsta servicenivåalternativen är skillnaderna mellan dimensionerad servicenivå och teoretiskt erhållen servicenivå så små att de för praktiskt bruk kan betraktas ligga inom felmarginalen. Speciellt gäller detta om man undantar fallen med lägst medelefterfrågan.

Enligt avsnitt tre ovan hävdar Berenson och Levine att normalfördelningen kan användas som approximation till Poissonfördelningen om fördelningens medelvärde är större än eller lika med fem och Schönsleben att approximationen kan göras om medelefterfrågan är större än nio. De genomförda beräkningarna stöder Schönslebens regel men även den mindre krävande regeln som Berenson och Levine angett ger en rimlig överensstämmelse. Det finns också en mycket god överensstämmelse mellan dimensionerad servicenivå och teoretiskt erhållen servicenivå då medelefterfrågan är lika med nio och större. För lägre medelefterfrågan är överensstämmelsen endast godtagbar för de högre servicenivåerna.

Beräkningar har även genomförts då beställningspunkterna dimensioneras med hjälp av Poissonfördelning medan efterfrågefördelningen är normalfördelad. Beräkningarna har gjorts för ett antal olika efterfrågefall, för olika servicenivåer samt för olika stora standardavvikelser. Dessa standardavvikelser har satts lika med 1.6, 1.4, 1.2, 1.0 respektive 0.8 gånger den standardavvikelse som gäller för Poissonfördelning. Följande slutsatser kan dras med utgångspunkt från dessa beräkningar.

1. Ju större standardavvikelsen är desto lägre blir den teoretiskt erhållna servicenivån jämfört med den målsatta servicenivån. Med andra ord kommer man vid stora standardavvikelser att få betydligt lägre servicenivåer än avsett om beställningspunkter och säkerhetslager dimensioneras med utgångspunkt från en Poissonfördelning. Skillnaderna är stora. Exempelvis får man en servicenivå som är storleksordningen tio procentenheter lägre än den avsedda servicenivån på 95 %.

2. När standardavvikelsen är lika med den standardavvikelse som motsvaras av Poissonfördelningen är överensstämmelsen mellan målsatta och teoretiskt erhållna servicenivåer hög, speciellt för fall där medelefterfrågan under ledtiden är 5 stycken eller större. De skillnader som finns vid denna storlek på efterfrågan kan från praktiska utgångspunkter betraktas som försumbara. Om man bortser från avrundningseffekter erhålles en tämligen god överensstämmelse mellan dimensionerad och erhållen servicenivå även när medelefterfrågan är så låg som 1 stycken under ledtiden.

3. När standardavvikelsen är mindre än den standardavvikelse som motsvaras av Poissonfördelningen blir den teoretiskt erhållna servicenivån högre än den målsatta servicenivån. Med andra ord kommer man vid små standardavvikelser att få betydligt högre servicenivåer än avsett om beställningspunkter och säkerhetslager dimensioneras med utgångspunkt från en Poissonfördelning. Skillnaderna är stora vid låga servicenivåer.

5 Jämförelser mellan normalfördelning och Poissonfördelning på en simulerad efterfrågefördelning

För att ytterligare belysa betydelsen av val av efterfrågefördelning vid dimensionering av beställningspunkter och säkerhetslager har den teoretiska analysen enligt föregående kapitel kompletterats med jämförelser baserade på efterfrågefördelningar som kan förväntas likna i verkligheten förekommande fördelningar. Dessa efterfrågefördelningar har genererats med hjälp av slumptal enligt avsnitt 2. Slumpgenereringen är gjord så att efterfrågan i möjligaste mån motsvarar verkliga förhållanden. Analysen avser skillnader i de beställningspunkter som erhålls med utgångspunkt från ett antagande om normalfördelning respektive Poissonfördelning.

Fyra olika efterfrågescenarier har analyserats. Ett scenario avser artiklar med mycket låg omsättning. En kundorder på mellan 1 och 3 stycken erhålls per kvartal. Ett scenario avser artiklar med låg omsättning. I detta scenario erhålls i medeltal en kundorder per månad med en kvantitet på mellan 1 och 3 styck. I scenariot med medelhög omsättning erhålls i medeltal en kundorder per vecka, också med en kvantitet på mellan 1 och 3 styck. Ett fjärde scenario avser hög omsättning och innebär att en kundorder erhålls i medeltal per dag, vardera med en kvantitet på mellan 1och 3 stycken. Medelefterfrågan och variationskoefficient för de olika efterfrågescenarierna och för de olika ledtider som simulerats framgår av tabellerna 1 – 4 nedan. För scenariot med hög efterfrågan har endast ledtiderna 1 vecka och två veckor analyserats eftersom tillgängliga Poissontabeller inte täcker en medelefterfrågan som är större än 25 stycken.

För beräkning av beställningspunkter har månatlig efterfrågan prognostiserats varje halvår med hjälp av tolv månaders glidande medelvärde. Simuleringarna har omfattat tjugo halvår och t-tester har använts för att testa i vilken utsträckning som signifikanta skillnader föreligger mellan beställningspunkter erhållna då säkerhetslagret dimensionerats med hjälp av normalfördelning respektive med hjälp av Poissonfördelning. Ledtiderna har antagits vara konstanta.

Resultaten från beräkningarna sammanfattas i tabell 1 – 4. Skillnaderna i procent för olika servicenivåer avser beställningspunkten baserad på normalfördelning minus beställningspunkten baserad på Poissonfördelning i förhållande till beställningspunkten baserad på normalfördelning. I dessa tabeller avser * att skillnaden är signifikant på 0,5 % nivån och ** att skillnaden är signifikant på 0,05 % nivån.

I inget av fallen kan efterfrågefördelningen approximeras med en Poissonfördelning enligt de kriterier som redovisades i avsnitt 3. För fallen med medelhög omsättning och ledtider på över en månad samt för fallen med hög omsättning kan normalfördelningen användas för att beräkna beställningspunkter enligt kriterierna i avsnitt 3.

Tabell 1 Procentuella skillnader mellan beställningspunkter beräknade från normalfördelad och Poissonfördelad efterfrågan för fallet Mycket låg omsättning

Ledtid	*Skillnad i % S-nivå 90*	*Skillnad i % S-nivå 95*	*Skillnad i % S-nivå 97*	*Medelefterfrågan under ledtid*	*Variations koefficient*
1 vecka	40*	65**	64**	0,16	3,78
2 veckor	68**	52**	47**	0,32	2,62
1 månad	53**	38*	43**	0,68	1,74
2 månad.	36*	35*	28*	1,35	1,25

Tabell 2 Procentuella skillnader mellan beställningspunkter beräknade från normalfördelad och Poissonfördelad efterfrågan för fallet Låg omsättning

Ledtid	*Skillnad i % S-nivå 90*	*Skillnad i % S-nivå 95*	*Skillnad i % S-nivå 97*	*Medelefterfrågan under ledtid*	*Variations koefficient*
1 vecka	69**	47**	55**	0,51	2,23
2 veckor	50**	57**	42**	1,02	1,63
1 månad	46**	42**	39**	2,14	1,13
2 månad.	29*	32*	31*	4,28	0,78

Tabell 3 Procentuella skillnader mellan beställningspunkter beräknade från normalfördelad och Poissonfördelad efterfrågan för fallet Medelhög omsättning

Ledtid	*Skillnad i % S-nivå 90*	*Skillnad i % S-nivå 95*	*Skillnad i % S-nivå 97*	*Medelefterfrågan under ledtid*	*Variations koefficient*
1 vecka	40**	37**	35**	2,06	1,05
2 veckor	27**	27**	29**	4,13	0,75
1 månad	21**	21**	24**	8,67	0,51
2 månad.	16**	17**	18**	17,35	0,35

Tabell 4 Procentuella skillnader mellan beställningspunkter beräknade från normalfördelad och Poissonfördelad efterfrågan för fallet Hög omsättning

Ledtid	*Skillnad i % S-nivå 90*	*Skillnad i % S-nivå 95*	*Skillnad i % S-nivå 97*	*Medelefterfrågan under ledtid*	*Variations koefficient*
1 vecka	17**	19**	20**	9,92	0,49
2 veckor	13**	14**	15**	19,84	0,35

Som framgår av tabellerna är för samtliga fall beställningspunkter beräknade med normalfördelning avsevärt högre än beställningspunkter beräknade med Poissonfördelning. Skillnaderna är också i praktiskt taget samtliga fall signifikanta på 0.05 %-nivån. Att de procentuella skillnaderna mellan beställningspunkterna blir mindre med ökande efterfrågan under ledtid beror på att säkerhetslagerdelen av beställningspunkterna relativt sett blir allt mindre.

Resultaten indikerar att beställningspunktsdimensionering baserad på normalfördelning ger upphov till påtagligt högre beställningspunkter än beställningspunktsdimensionering baserad på Poissonfördelning när efterfrågan är hög och/eller starkt varierande. Detta är i överensstämmelse med de resultat som erhölls med hjälp av analytiska beräkningar och som redovisades i föregående avsnitt.

4 Sammanfattning och slutsatser

Resultat och slutsatser från den genomförda studien kan sammanfattas enligt följande.

- Med utgångspunkt från de riktlinjer för val av efterfrågefördelning som finns publicerade i litteraturen kan för praktiskt bruk följande regler tillämpas.

  Man kan använda normalfördelning om variationskoefficienten, dvs förhållandet mellan standardavvikelsen och efterfrågans medelvärde under ledtiden är mindre än storleksordningen 0,6.

  Man kan använda Poissonfördelningen om standardavvikelsen är lika med roten ur medelefterfrågan under ledtid +/- 20 %.

- De principiella förhållandena mellan beställningspunkter beräknade med hjälp av normalfördelning och beställningspunkter beräknade med hjälp av Poissonfördelning framgår av följande tabell. Låg och hög efterfrågan avser mindre än storleksordningen 5 stycken respektive större än storleksordningen 15 stycken under ledtiden. Liten efterfrågevariation avser fall med variationskoefficienter mindre än storleksordningen 0,4 respektive större än storleksordningen 0,6. Förhållandena gäller oavsett målsatt servicenivå.

	Liten efterfrågevariation	*Stor efterfrågevariation*
Låg efterfrågan	Best pkt (P) ~ Best pkt (N)	Best pkt (N) > Best pkt (P)
Hög efterfrågan	Best pkt (N) > Best pkt (P)	Best pkt (N) >> Best pkt (P)

- Vid servicenivåer under 95 %, en medelefterfrågan under ledtid som är mindre än 10 samt en variationskoefficient som är mindre än eller lika med 0.4, ger normalfördelningen och Poissonfördelningen ungefär samma beställningspunkter inom ramen för i praktiken acceptabla felmarginaler. Val av fördelning har också mindre betydelse i de fall variationskoefficientens storlek motsvarar Poissonfördelningens standardavvikelse.

- Användning av normalfördelning för att dimensionera beställningspunkter när den verkliga efterfrågan är Poissonfördelad leder till högre servicenivåer än vad som avsetts. För målsatta servicenivåer under 95 % blir de erhållna servicenivåerna avsevärt högre.

- Om beställningspunkter dimensioneras med hjälp av Poissonfördelning medan efterfrågefördelningen är normalfördelad

  -får man vid stora standardavvikelser betydligt lägre servicenivåer än avsett

  -får man vid standardavvikelser som motsvar den teoretiska för Poissonfördelningen ungefär samma servicenivåer som avsett

-får man vid små standardavvikelser betydligt högre servicenivåer än avsett

- För efterfrågefördelningar som slumpgenererats så att de i möjligaste mån liknar verkligt förekommande fördelningar blir beställningspunkter beräknade med utgångspunkt från ett normalfördelningsantagande klart högre än om de beräknas med utgångspunkt från ett Poissonfördelningsantagande. Speciellt gäller detta när medelefterfrågan under ledtid är hög och efterfrågevariationerna stora.

Referenser

Andersson, J. – Ljungfeldt, S. – Wandel, S. (1970) Produktionsstyrning, Studentlitteratur.

Axsäter, S. (1991) Lagerstyrning, Studentlitteratur.

Berenson, M. – Levine, D. (1989) Basic business statistics, Prentice-Hall.

Delurgio, S. - Bhamed, C. (1991) Integrating forecasts and inventory management of low-volume demands, APICS's Conference Proceedings, sid 589-593.

Fagan, M. (1984) Determination of safety stock: A practical approach for service industries, APICS's Conference Proceedings: Readings in Production and Inventory Control and Planning, sid 84-88.

Fortuin, L. (1980) Five popular probability density functions: A comparison in the field of stock-control models, Journal of the Operations Research Society, Vol. 31 No. 10, sid 937-942.

Guelzo, C. (1986) Introduction to logistics management, Prentice-Hall.

Hax, A. – Candea, D. (1984) Production and inventory management, Prentice-Hall.

Lau, H-S. (1989) Toward an inventory control system under non-normal demand and lead-time uncertainty, Journal of Business Logistics, Vol. 10 No. 1, sid 88-103.

Mattsson, S-A. (2002) Känslighetsanalys av beställningspunktssystem, Intern forskningsrapport, Institutionen för Teknisk ekonomi och logistik, Lunds Universitet.

Molina, E. (1942) Poisson's exponential binomial limit, Van Nostrand Company, Vol. 24 No. 16, sid 1769-1772.

Naddor, E. (1978) Sensitivity to distributions in inventory systems, Management Science.

Schönsleben, P. (2000) Integral logistics management, The St. Lucie Press.

Shah, N. (1988) An integrated concept of materials management, Tata McGraw-Hill.

Silver, E. – Peterson, R. (1985) Decision systems for inventory management and production planning, John Wiley & Sons.

Wilkinson, S. (1996) Service level and safety stock based on probability, Control, April, sid 23-25.

Zotteri, G. (2000) The impact of distributions of uncertain lumpy demand on inventories, Production Planning & Control, Jan – Feb, sid 32-43.