

Efterfrågefördelningar för bestämning av säkerhetslager

Stig-Arne Mattsson

Sammanfattning

Vid lagerstyrning finns det behov av att dimensionera beställningspunkter och säkerhetslager med utgångspunkt från en önskad servicenivå. För att åstadkomma detta är det nödvändigt att kunna karakterisera hur efterfrågan varierar. Traditionellt har problemet lösts genom att anta att efterfrågevariationerna följer någon form av standardiserad efterfrågefördelning. Vid tillämpningar i företag är det nästan uteslutande normalfördelningar som används. I några fall förekommer det också att Poissonfördelningar används, speciellt vid lagerstyrning av reservdelar.

Det är emellertid inte självklart att verkliga efterfrågefördelningar på ett acceptabelt sätt motsvarar vare sig normalfördelning eller Poissonfördelning. Speciellt kan detta för normalfördelningen ifrågasättas för lågrörliga artiklar med ojämna efterfrågemönster och för Poissonfördelningen om uttagen från lager inte rör sig om storleksordningen enstaka styck åt gången. Det är följaktligen av intresse att studera och utvärdera i vilken utsträckning andra fördelningar på ett bättre sätt kan representera verklighetens efterfrågemönster. Syftet med det forskningsprojekt som redovisas i föreliggande rapport är att studera hur gammafördelningar och empiriska efterfrågefördelningar kan genereras med utgångspunkt från efterfrågehistorik. Syftet är också att utvärdera de båda fördelningarna i förhållande till normalfördelning med avseende på de servicenivåer som man uppnår med hjälp av respektive fördelning.

Av de resultat som erhållits i studien framgår att skillnaderna mellan servicenivåer som erhålls med hjälp av empirisk fördelning jämfört med normalfördelning är praktiskt sett försumbara vid små efterfrågevariationer. Däremot är skillnaderna stora eller mycket stora för de fall som har stora efterfrågevariationer. Servicenivåerna blir klart högre med empirisk fördelning och fördelningen ger också upphov till servicenivåer som i större utsträckning står i överensstämmelse med önskade servicenivåer. Även för gammafördelning är skillnaderna relativt normalfördelning praktiskt sett försumbara för de efterfrågefall som har låga efterfrågevariationer. De är däremot stora eller mycket stora för efterfrågefall med stora efterfrågevariationer. För dessa fall ger gammafördelningen högre servicenivåer än normalfördelning och den ger också upphov till servicenivåer som i större utsträckning står i överensstämmelse med önskade servicenivåer. Från de erhållna resultaten kan följande allmänna slutsatser dras.

För efterfrågefall med variationskoefficienter mindre än 0,5 är de tre studerade metoderna praktiskt sett likvärdiga ur styrningssynpunkt. För efterfrågefall med variationskoefficienter större än 0,5 är både den empiriska fördelningen och gammafördelning att

föredra jämfört med normalfördelning. Ju mer efterfrågan varierar och ju längre ledtiderna är desto bättre resultat erhålls med gammafördelning jämfört med empirisk fördelning. Om man föredrar att använda sig av en enda fördelning är gammafördelningen att föredra.

1 Inledning

1.1 Bakgrund

Lagerstyrning innebär principiellt att återkommande för varje lagerförd artikel fatta beslut om när lagret måste fyllas på och med hur stor kvantitet det skall fyllas på. Besluten har sålunda en tidsdimension och en kvantitetsdimension och måste baseras på en föreställning och bedömning av hur stor efterfrågan kommer att bli i framtiden. Eftersom det är fråga om framtidsbedömningar är besluten följaktligen förknippade med osäkerhet. Speciellt avgörande är denna osäkerhet för beslutens tidsdimension, dvs för att fatta beslut om när inleveranser måste ske. Underskattas efterfrågan kommer det att uppstå brist och överskattas den kommer lagret att bli onödigt stort.

Som ett sätt att gardera sig mot att inte oacceptabelt stora brister uppstår och därmed kunna säkerställa en konkurrenskraftig servicenivå, använder man sig av säkerhetslager. Att dimensionera sådana säkerhetslager är egentligen en fråga om att avväga kostnader för kapitalbindning och lagerhållning mot de kostnader som uppstår när bristsituationer inträffar. Eftersom det i allmänhet är näst intill omöjligt att generellt uppskatta bristkostnader blir det i praktiken snarare en fråga om att dimensionera säkerhetslager med utgångspunkt för en önskad servicenivå. En sådan dimensionering kan endast åstadkommas på ett rimligt optimalt sätt om man känner till hur efterfrågan varierar över tiden, dvs man känner till eller kan uppskatta efterfrågans fördelning.

1.2 Problemdiskussion och forskningsfråga

Traditionellt har problemet med att dimensionera säkerhetslager baserat på en önskad servicenivå lösts genom att anta att efterfrågevariationerna följer någon form av standardiserad efterfrågefördelning. I tillämpningar i företag har det nästan uteslutande rört sig om att basera beräkningarna på en normalfördelning. Det förekommer emellertid också att Poissonfördelningar används, speciellt för lagerstyrning av reservdelslager, och i enstaka fall även ytterligare standardfördelningar.

Att välja lämplig fördelning kan ha stor betydelse. Detta har bland andra illustrerats av DeLurgio och Bahme (1991, sid 592). De har med hjälp av enkla beräkningar påvisat vilka skillnader det kan föreligga om man utgår från ett antagande om att den verkliga efterfrågefördelningen motsvarar en Poissonfördelning eller en normalfördelning. Vid samma medelvärden och standardavvikelser medförde Poissonfördelningen storleksordningen dubbelt så stora bristkvantiteter per lagercykel som normalfördelningen för lågrörliga artiklar.

I litteraturen finns det delade meningar om hur betydelsefullt valet av fördelning är. Utifrån ett mer praktiskt perspektiv argumenterar Wilkinson (1996, sid 239) för att val av efterfrågefördelning har mindre betydelse och att *irrespective of volume and variability*

it is valid to assume a normal distribution. Silver och Peterson (1985, sid 289) menar att de fel som begås genom att använda normalfördelning är små i jämförelse med andra inslag av osäkerheter vid dimensionering och användning av beställningspunkter. I motsats till detta hävdar Lau (1989, sid 99) att om man använder en normalfördelning och den verkliga efterfrågefördelningen inte är normal kommer man att få stora skillnader mellan beräknat och optimalt säkerhetslager och stora skillnader i erhållen servicenivå jämfört med önskad. Zotteri (2000, sid 32) menar att betydelsen av att välja rätt efterfrågefördelning är speciellt viktig ju högre servicenivå man vill ha. Skillnaderna i erforderlig lagerstorlek är i sådana fall starkt beroende av vald fördelning. En liknande uppfattning redovisas också av Bookbinder och Lordahl (1989, sid 302).

Den fråga man då ställs inför är vilken fördelning man bör välja i en konkret situation. I litteraturen har ett antal riktlinjer formulerade som underlag för val av fördelning. Se exempelvis Mattsson (2003) för val mellan normalfördelning och Poissonfördelning. Normalfördelningen är i många avseenden attraktiv att använda. Det finns en utbredd erfarenhet av att använda den och det finns en väl utvecklad beräkningsmetodik för att använda den för att dimensionera säkerhetslager. Normalfördelningen har emellertid en del användarmässiga begränsningar, speciellt vid stora efterfrågevariationer eftersom den är symmetrisk kring sitt medelvärde och inte minst vid korta ledtider då den riskerar att inkludera negativa efterfrågevärden. I båda fallen leder den till för små säkerhetslager och därmed lägre servicenivåer än man dimensionerat sitt lagerstyrningssystem för.

Med Poissonfördelning undviker man problemen med negativa efterfrågevärden. Det är också en osymmetrisk fördelning. Den stora svagheten med Poissonfördelningen är emellertid att den utgår från att efterfrågans medelvärde är lika med dess varians. Detta medför att den endast är rimligt tillämpningsbar när varje kundorder representerar mycket små kvantiteter, exempelvis så som förhållandena kan vara i reservdelslager.

Gammalfördelningen är en fördelning som förenklat kan sägas kombinera normalfördelningens och Poissonfördelningens fördelar. Den är emellertid beräkningsmässigt mer ofullständigt utvecklad i litteraturen, speciellt om man vill använda fyllnadsgrad som servicenivådefinition. Att gammalfördelningen kan vara ett intressant alternativ till normalfördelningen påpekas bland annat av Moors och Strijbosch (2002). Den är också enligt litteraturen och enligt egen erfarenhet näst intill helt otestad i praktisk användning i företag. Dess egenskaper bedöms emellertid så intressanta att det kan vara önskvärt att utveckla dess användbarhet och att utvärdera användningen av den. Mot denna bakgrund är det naturligt att formulera följande forskningsfråga.

- Hur kan man använda gammalfördelningen för att dimensionera säkerhetslager och hur mycket betyder det att använda denna fördelning jämfört med att använda normalfördelningen?

Användning av standardfördelningar för att modellera efterfrågevariationer innebär ett antal nackdelar, oavsett vilken fördelning som valts. Det är svårt att veta i vilken utsträckning de på ett rimligt korrekt sätt representerar de verkliga efterfrågevariationerna. Graden av överensstämmelse kan förändras över tiden. Till nackdelarna räknas också att de matematiska och statistiska samband som måste användas vid tillämpning av standardfördelningar ofta är svåra att förstå för personal som arbetar med lagerstyrning.

En naturlig fråga att ställa sig i det här sammanhanget är därför Varför över huvud taget arbeta med standardiserade efterfrågefördelningar? Varför inte i stället generera en verklig efterfrågefördelning med utgångspunkt från efterfrågehistorik och använda den för dimensionering av säkerhetslager och beställningspunkter? Man behöver då inte bekymra sig om ifall villkoren för den använda standardfördelningen är uppfyllda eller ej. Däremot innebär förfarandet ett antagande om att det historiska efterfrågemönstret är representativt även för den framtida efterfrågan. I princip måste emellertid samma typ av antagande göras om man utgår från en standardfördelning som på basis av historiskt material testats och visat sig väl överensstämma med den faktiska efterfrågefördelningen. Resonemanget leder fram till följande forskningsfråga.

- Hur kan man generera empiriska efterfrågefördelningar och hur mycket betyder det att använda dem jämfört med att använda normalfördelningen vid dimensionering av säkerhetslager?

1.3 Syfte och avgränsningar

Det forskningsprojekt som redovisas i denna rapport syftar till att studera hur gammafördelningar och empiriska efterfrågefördelningar kan genereras med hjälp av efterfrågehistorik. Syftet är också att utvärdera de båda fördelningarna vid lagerstyrning i förhållande till de resultat i form av erhållna servicenivåer som man får genom att använda normalfördelning.

Dimensionering av beställningspunkter och säkerhetslager påverkas inte endast av variationer i efterfrågan utan även av variationer i ledtider för lagerpåfyllning. Detta inslag av osäkerhet behandlas emellertid inte här. Ledtiden antas vara konstant och känd. Vidare behandlas endast fall där efterfrågan varierar slumpmässigt utan förekomst av trender eller säsongvariationer.

Vid analyser och utvärderingar av vilka servicenivåer som kan erhållas med hjälp av empirisk fördelning och gammafördelning i förhållande till normalfördelning har endast beställningspunktssystem använts för den simulerade lagerstyrningen. Denna avgränsning bedöms emellertid inte innebära några begränsningar för studiens slutsatser eftersom lagerstyrningssystem som periodbeställningssystem, täcktidsplanering och materialbehovsplanering alla bygger på samma grundprinciper för beräkning av när ett lager måste fyllas på.

Vid analyserna tas ingen hänsyn till att materialuttag från lager är större än ett styck åt gången, dvs hänsyn tas inte till så kallade överdrag. Detta leder till att erhållna servicenivåer nästan genomgående blir lägre än de servicenivåer som lagerstyrningssystemet dimensionerats för. Förhållandet är emellertid detsamma oavsett vilken efterfrågefördelning som används.

1.4 Rapportens uppläggning

Föreliggande rapport redovisar utgångspunkter, tillvägagångssätt, analyser och slutsatser från det genomförda forskningsprojektet. Redovisningen är upplagd enligt följande.

I kapitel 2 behandlas den teoretiska bakgrunden till hur man kan generera efterfrågefördelningar med utgångspunkt från verklig historisk efterfrågan, så kallad empirisk för-

delning. I kapitlet redovisas också den metodik som utvecklats för att kunna använda empirisk fördelning i kombination med servicenivåer definierade som fyllnadsgrad, dvs som andel av efterfrågan som kan tillfredsställas direkt från lager.

Motsvarande redovisning med avseende på gammafördelning görs i kapitel 3. De modeller och beräkningsmetoder för gammafördelning som finns i litteraturen redovisas. Dessutom presenteras den beräkningsmetodik som utvecklats för att möjliggöra användning av gammafördelning i kombination med servicenivåer definierade som fyllnadsgrad.

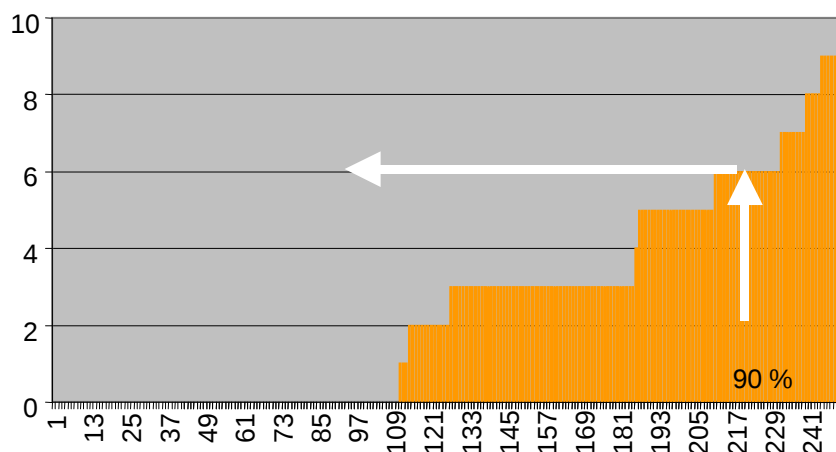
Det dataunderlag och det angreppssätt som använts för att genomföra analyser och jämförelser av användning av olika fördelningar för bestämning av beställningspunkter redovisas i kapitel 4. Bland annat presenteras den teoretiskt genererade efterfrågan och den efterfrågehistorik som erhållits från fyra fallföretag och som utgjort underlag för simuleringar och analyser. Dessutom presenteras använd simuleringsmodell.

De resultat och de analyser som kunnat göras på basis av resultaten från de genomförda simuleringskörningarna redovisas i kapitel 5 och 6. Kapitel 5 behandlar jämförelser mellan empirisk fördelning och normalfördelning medan kapitel 6 behandlar jämförelser mellan gammafördelning och normalfördelning.

I kapitel 7 görs en sammanfattning av de i projektet erhållna resultaten. Dessutom dras ett antal slutsatser med utgångspunkt från dessa resultat.

2 Generering och användning av empirisk efterfrågefördelning

För att generera en empirisk efterfrågefördelning måste först ett antal värden på efterfrågan under ledtid vid olika tidpunkter beräknas genom att summera daglig efterfrågan under det antal dagar som motsvarar ledtidens längd. Dessa beräknade ledtidsefterfrågevärden sorteras från lägsta till högsta värde. I figur 1 visas exempel på resultat som kan erhållas efter sådana beräkningar och sorteringar. I diagrammet anger y-axeln den verkliga efterfrågan under ledtid och x-axeln antal gånger som respektive efterfrågevärde förekommit.



Figur 1 Genererad efterfrågefördelning för att bestämma beställningspunkter

Sammanlagt innehåller diagrammet 250 ledtidsförbrukningar. Om man antar att önskad servicenivå fastställts till 90 %, dvs lagerbrist kan endast accepteras i 10 % av alla lagercykler, så bör man enligt diagrammet sätta beställningspunkten till 6 st. 90 % av alla ledtidsförbrukningar, dvs $0,9 \cdot 250 = 225$, kommer då att vara sex eller färre.

I litteraturen finns tre alternativa tillvägagångssätt för att generera empiriska efterfrågefördelningar presenterade. Samtliga utgår från historisk efterfrågan i form av faktiska utleveranser per period, exempelvis dag eller vecka. Ett av dessa tillvägagångssätt (Se exempelvis Brown, 1963 och Hax och Candea, 1984) innebär att man delar in hela den tid från vilken man vill ta hänsyn till den historiska efterfrågan i icke-överlappande intervall vars längd är lika med ledtiden. För varje sådant intervall beräknas summa efterfrågan. Man får då ett antal ledtidsförbrukningar som motsvarar historikens kalendertid dividerat med ledtidens längd. Ledtidsförbrukningar som är lika stora antalsberäknas och man får en serie av tal, $n(d)$, där $n(d)$ är lika med antal efterfrågeförbrukningar med efterfrågan lika med d . Från denna talserie beräknas $p(d)$, dvs andelen ledtidsförbrukningar med efterfrågan lika med d , genom att dividera $n(d)$ med $\sum n(d)$ över alla d . Akkumulerade sannolikheter för att efterfrågan under ledtid skall överstiga en viss efterfrågan kan därefter beräknas och beställningspunkten fastställas med utgångspunkt från önskad servicenivå. Det finns också en teknik utarbetad för att successivt uppdatera de beräknade sannolikheterna i takt med att nya efterfrågeförbrukningar blir kända.

Ett likartat sätt att gå tillväga har utvecklats av Wilcox (1970, sid 51). Även denna metod utgår från historisk efterfrågan per period, exempelvis dag eller vecka. Från och med varje sådan period och över hela den kalendertid som man vill använda efterfrågehistoriken för att generera en efterfrågefördelning skapas ledtidsförbrukningar genom att summera efterfrågan över det antal perioder som motsvaras av ledtidens längd. Den första ledtidsförbrukningen blir lika med $\sum dp(k)$ från 1 till l , där $dp(k)$ är lika med efterfrågan i period k och l lika med ledtidens längd i perioder. Den andra ledtidsförbrukningen erhålls genom att på motsvarande sätt summera från period 2 till period $l+1$, den tredje genom att summera från period 3 till $l+2$ etc. På så sätt skapas ett antal ledtidsförbrukningar som motsvarar antalet historikperioder minus ledtidens längd i perioder plus ett. Beräkningsmetodiken är sedan den samma som för Browns metod.

Den tredje metoden bygger på en statistisk metodik som kallas bootstrapping. Den innebär att man bygger upp en fördelning genom att slumpmässigt välja och därefter kombinera observationer. Användning av metoden i det är sammanhanget har bland andra beskrivits av Bookbinder och Lordahl (1989, sid 302), Smart (2002) samt Smart och Willemain (2000, sid 64). Willemain, Smart och Schwarz (2004) har vidareutvecklat tekniken så att även fall med autokorrelerad efterfrågan kan hanteras.

Metoden utgår på samma sätt som de båda föregående från en följd av efterfrågedata per period. Ett slumpmässigt urval av lika många perioder som motsvaras av ledtidens längd görs därefter, dvs är ledtiden fyra perioder görs ett slumpmässigt urval av efterfrågevärden från fyra perioder. Summan av efterfrågan i dessa perioder beräknas och får representera en observation från efterfrågans fördelning under ledtiden. Det slumpmässiga urvalet upprepas ett stort antal gånger så att ett tillräckligt stort antal observationer kan erhållas. Urvalet sker med vad som inom statistiken kallas urval med återläggning, dvs alla perioder har lika stor sannolikhet att komma med vid varje urvalstillfälle. I ovan nämnda referenser talas det om 10.000-tals urval. Ju fler urval, desto mer representativ

blir efterfrågefördelningen. De beräknade ledtidsefterfrågevärdena, $n(d)$, och sannolikheter, $p(d)$, beräknas därefter på samma sätt som för de båda metoderna ovan, likaså beräkningen av beställningspunkter.

Skillnaden mellan de tre metoderna är främst en fråga om hur många ledtidsefterfrågevärden man kan generera. När de väl tagits fram är beräkningsförfarandet detsamma. Jämförelsevis ställer den först nämnda metoden störst krav på att det finns en lång efterfrågehistorik för att kunna få ett acceptabelt antal ledtidsförbrukningar att basera beställningspunktsberäkningen på och den sistnämnda metoden minst krav. Det är framför allt i detta avseende som bootstrappingmetodens styrka ligger. Små krav på en lång efterfrågehistorik är speciellt en fördel i de fall det förekommer efterfrågetrender eller andra former av systematiska efterfrågeförändringar. Sådana systematiska förändringar gör att endast en mycket begränsad efterfrågehistorik kan vara representativ för den framtida efterfrågefördelningen.

Den förstnämnda metoden är enklast att förstå och den kräver minst omfattande och komplicerade beräkningar, speciellt i jämförelse med bootstrappingmetoden. Till bootstrappingmetodens nackdelar hör att den är betydligt komplexare än de båda övriga och att hänsyn inte kan tas till förekommande korrelation mellan efterfrågan från period till period utom för den mest komplexa varianten eftersom efterfrågevärden slumpmässigt hämtas från alla efterfrågehistorikens perioder när en ledtidsförbrukning skapas. För de båda övriga metoderna summeras efterfrågevärden från intilliggande perioder. Värdet av att kunna generera 1000-tals ledtidsefterfrågevärden kan diskuteras och utom för mycket långa ledtider och kort efterfrågehistorik bedöms det antal ledtidsefterfrågevärden som den andra metoden möjliggör vara fullt tillräckligt. Exempelvis får man 221 ledtidsefterfrågevärden från ett års efterfrågehistorik motsvarande 240 dagar då ledtiden är 20 dagar. Detta antal är betydligt större än det antal värden som visats krävas för att beräkna standardavvikelser med tillräcklig noggrannhet (Mattsson, 2007).

Ingen av de tre metoderna medför några problem om ledtiden förändras, förutsatt att efterfrågehistoriken lagras per period och inte per ledtidsintervall. Det är bara att göra om beräkningarna för den nya ledtiden.

Det kan tilläggas att ovanstående metoder inte endast utgör ett sätt att dimensionera beställningspunkter. De innebär också att medelefterfrågan under ledtid prognostiseras. Med andra ord krävs det inte en separat prognostisering av ledtidsförbrukningen utöver beräkning av säkerhetslager vid dimensionering av beställningspunkter vilket är fallet vid användning av standardfördelningar.

Samtliga alternativa beräkningssätt bygger på att man använder cykelservice som definition på servicenivå. Detta servicenivåmått har emellertid ett antal nackdelar, exempelvis att det inte tar hänsyn till hur ofta inleveranser sker vilket i sin tur medför att leveransförmågan blir sämre för högomsatta än för lågomsatta artiklar vid samma servicenivå. Av detta skäl har en ny metod för att beräkna säkerhetslager med hjälp av empirisk efterfrågefördelning som möjliggör användning av fyllnadsgrad som servicenivåmått utvecklats.

Beställningspunktsberäkningen genomförs då på följande sätt. Om önskad servicenivå betecknas med S gäller följande samband.

$$1 - S = \frac{bk\dot{a}}{d} = \frac{n * bkc}{d} = \frac{d * bkc}{q * d} = \frac{bkc}{q}$$

där $bk\dot{a}$ = bristkvantitet per år
 bkc = bristkvantitet per lagercykel
 d = efterfrågan per år
 n = antal lagercykler per år
 q = orderkvantitet per inleverans

Följaktligen är acceptabel bristkvantitet per lagercykel $bkc = q * (1 - S)$.

För var och en av en successiv följd av beställningspunkter beräknas därefter skillnaden mellan var och en av de genererade ledtidsefterfrågevärdena och respektive beställningspunkt. Är denna skillnad större än noll innebär det att brist skulle uppstå för denna ledtidsefterfrågan. Medelvärde av alla bristkvantiteter för respektive beställningspunkt beräknas därefter. Detta medelvärde representerar förväntad bristkvantitet per lagercykel.

Beräkningarna kan uttryckas med hjälp av följande formel.

$$E bkc(s) = \sum_{x / x \geq s} (x - s) * p(x)$$

där $Ebkc(s)$ = förväntad bristkvantitet per lagercykel när beställningspunkten är lika med s
 x = ledtidsefterfrågan
 s = beställningspunkt
 $p(x)$ = sannolikheten för att en viss ledtidsefterfrågan inträffar

Eftersom samtliga ledtidsefterfrågevärden jämförs med respektive beställningspunkt kommer $p(x)$ att vara lika med 1 dividerat med antalet ledtidsefterfrågevärden.

Den beställningspunkt vars förväntade bristkvantitet närmst motsvarar den bristkvantitet som enligt ovan beräknats från önskad servicenivå är den beställningspunkt som ger en servicenivå motsvarande den önskade. Formelmässigt är detta detsamma som att söka

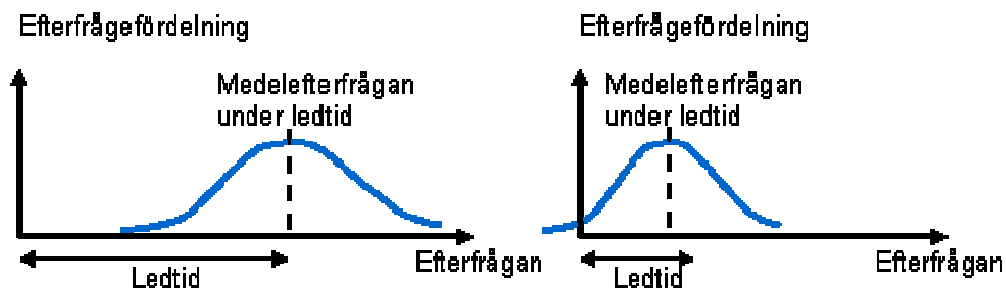
$$\min |Ebkc(s) - bkc| \quad \text{över alla } s.$$

3 Generering och användning av gammafördelning

Den i både litteraturen och vid lagerstyrning i praktiken klart mest använda fördelningen för att modellera efterfrågevariationer är normalfördelningen. Orsaken till detta är att normalfördelningen i allmänhet ganska väl återspeglar i verkligheten förekommande efterfrågefördelningar eftersom efterfrågevariationerna under ledtiden kan betraktas som sammansatta av flera oberoende slumpmässigt inträffade händelser som adderas. Dessutom är normalfördelningen från beräkningssynpunkt mycket attraktiv att använda. Vissa författare har också hävdade att mervärdet av att använda andra fördelningar är li-

tet, speciellt om man beaktar andra förenklande antaganden som görs vid beställningspunktsberäkning (Naddor, 1978 och Fortuin, 1980).

Normalfördelningen har emellertid en del användarmässiga begränsningar. (Lau, 1989 samt Razi och Tarn, 2003). Speciellt gäller detta vid stora efterfrågevariationer eftersom normalfördelningen är symmetrisk kring sitt medelvärde och vid korta ledtider då den riskerar att inkludera negativa efterfrågevärden. Vad som händer vid korta ledtider illustreras i figur 2. Den vänstra delen av figuren representerar fallet med långa ledtider. Medelefterfrågan under ledtid är då större än åtskilliga standardavvikelser och sannolikheten för negativ efterfrågan liten. Om i stället ledtiden är kort enligt den högra delen av figuren blir förhållandet annorlunda. Ju kortare ledtid, desto större sannolikhet för negativa efterfrågevärden. Exempelvis blir sannolikheten för negativ efterfrågan 2,5 % om medelefterfrågan under ledtid är lika med 1,96 gånger standardavvikelsen under ledtid.



Figur 2 Illustration av vad som händer med normalfördelningsfunktionen för efterfrågan under ledtid när ledtiden är lång respektive kort.

Antalet standardavvikelser mellan noll och medelefterfrågan är kritisk med avseende på hur väl en normalfördelning kan förväntas representera en verklig efterfrågefördelning. Måttet används därför som ett kriterium för när det är rimligt att approximera en efterfrågefördelning med normalfördelningen. Exempelvis hävdar Schönsleben (2004) att normalfördelningen kan användas om medelefterfrågan är större än 2,5 gånger standardavvikelsen och Fagan (1984) att normalfördelningen kan användas om medelefterfrågan är större än 1,7 gånger standardavvikelsen. Ett ännu hårdare krav ställer Razi och Tarn (2003) som menar att normalfördelningen endast bör användas om medelefterfrågan är större än fem standardavvikelser.

För att lösa problemet med att normalfördelningen också omfattar negativa värden har två olika modeller som modifierar normalfördelningen, i ena fallet genom att helt bortse från den del av efterfrågan som är negativ och i den andra genom att öka den positiva efterfrågan med den negativa (Strijbosch och Moors, 2006). Modellerna är emellertid mycket komplexa vilket medför att de beräkningsmässiga fördelar som föreligger för normalfördelningen helt går förlorade. De utgör dessutom fortfarande mycket grova approximationer och är inte bättre än den äkta normalfördelningen vad gäller att kunna hantera efterfrågevariationer som är osymmetriska kring sitt medelvärde.

Ett intressantare alternativ är gammafördelningen. Denna fördelning löser både problemet med att inte ge negativa efterfrågevärden och den modellerar osymmetriska efter-

frågefördelningar med snedfördelning mot stora efterfrågevärden. Fördelningen är känd sen mycket länge bland statistiker och finns beskriven i logistiklitteraturen sedan tidigt 70-tal. Den finns exempelvis tabellerad av Burgin och Norman i en artikel från 1976.

Gammafördelningens frekvensfunktion har följande utseende.

$$f(x) = \frac{\alpha^k * x^{k-1} * e^{-\alpha * x}}{\Gamma(k)}$$

där $\Gamma(k)$ är lika med gammafunktionen. För de ingående parametrarna gäller att $0 \leq x \leq \infty$, $\alpha > 0$ och $k > 0$. Se exempelvis Burgin (1975) och Keaton (1995).

Fördelningens medelvärde och standardavvikelse är

$$\mu = \frac{k}{\alpha} \text{ respektive } \sigma = \sqrt{\frac{k}{\alpha^2}}$$

Från dessa samband kan parametrarna i gammafördelningen beräknas enligt följande.

$$k = \frac{\mu^2}{\sigma^2} \text{ och } \alpha = \frac{\mu}{\sigma^2}, \text{ dvs de kan bestämmas genom att uppskatta medelefterfrågan}$$

under ledtid och efterfrågans standardavvikelse under ledtid.

I motsats till normalfördelningen som är definierad från minus oändligheten till plus oändligheten, dvs även inkluderar negativ efterfrågan, är gammafunktionen endast definierad för positiva tal. Genom att den inte är symmetrisk kring sitt medelvärde kan den också förväntas representera lågrörlig efterfrågan på ett bättre sätt än normalfördelningen. Gammafördelningen tenderar att mer och mer motsvara normalfördelningen ju större k är, dvs ju större medelefterfrågan är i förhållande till dess standardavvikelse.

För att beräkna sannolikheten att efterfrågan inte överskrider en viss beställningspunktskvantitet, dvs att brist inte inträffar under en lagercykel, finns olika approximativa formler presenterade i litteraturen (Keaton, 1995 och Burgin, 1975). Sannolikheten kan också beräknas med hjälp av standardfunktioner i Excel. (GAMMA-FÖRD(x;alfa;beta;sant) där alfa motsvarar k och beta $\hat{U}$). Alla dessa sätt att beräkna sannolikheter har emellertid det gemensamt att de endast kan användas när servicenivån definierats som cykelservice. Det har inte heller i litteraturen utvecklats någon funktion motsvarande servicefunktionen för normalfördelning. För att kunna använda servicenivådefinitionen fyllnadsgrad har därför en metodik liknade den som användes för empirisk efterfrågefördelning utvecklats. Beställningspunktsberäkningen genomförs då på följande sätt. Om önskad servicenivå betecknas med S gäller följande samband enligt avsnitt 2.

$$bkc = q * (1 - S).$$

För var och en av en successiv följd av beställningspunkter beräknas därefter skillnaden mellan en successiv följd av efterfrågevärden med start från beställningspunkten och uppåt och respektive beställningspunkt. Skillnaden multipliceras med sannolikheten för

respektive efterfrågevärde skall inträffa. Sannolikheten beräknas med hjälp av gammafördelningens frekvensfunktion. Summan av dessa värden för respektive beställningspunkt beräknas därefter. Detta värde representerar förväntad bristkvantitet per lagercykel.

Beräkningarna kan uttryckas med hjälp av följande formel.

$$E bkc(s) = \sum_{x/x \geq s} (x - s) * p(x)$$

där $E bkc(s)$ = förväntad bristkvantitet per lagercykel när beställningspunkten är lika med s

x = ledtidsefterfrågan

s = beställningspunkten

$p(x)$ = sannolikheten för att en viss ledtidsefterfrågan inträffar

Eftersom frekvensfunktionen för gammafördelningen är en kontinuerlig funktion har $p(x)$ beräknats med hjälp av numerisk integration av frekvensfunktionen $f(x)$. Detta har gjorts i Excel med hjälp av standardfunktionen GAMMAFÖRD(x;alfa;beta;falskt). Vid den numeriska integrationen har avståndet $n-0,5$ till $n+0,5$ delats in i fyra intervall. n står för ett visst efterfrågevärde.

Den beställningspunkt vars förväntade bristkvantitet närmst motsvarar den bristkvantitet som enligt ovan beräknats från önskad servicenivå är den beställningspunkt som ger en servicenivå motsvarande den önskade. Formelmässigt är detta detsamma som att söka

$$\min |E bkc(s) - bkc| \quad \text{över alla } s.$$

4 Dataunderlag och analysmetodik

För att besvara de två forskningsfrågorna och kunna utvärdera användning av gammafördelning respektive empirisk fördelning i förhållande till normalfördelning har simulering med hjälp av Excel och makroprogram skrivna i Visual Basic använts. Simulering är en förhållandevis ofta använd metod för att utvärdera lagerstyrningssystem och lagerstyrningssystem (se exempelvis Olhager och Persson, 2006, Huq et al, 2006, Bannerjee et al, 2003, Ganeshan et al, 2001, Hong-Minh et al, 2000, Småros et al, 2003). Som underlag för de genomförda simuleringarna har dels teoretiskt genererade efterfrågedata, dels efterfrågehistorik från fyra fallföretag använts. I detta kapitel presenteras detta efterfrågeunderlag och den simulerings- och utvärderingsmetodik som utnyttjats för att besvara forskningsfrågorna.

4.1 Dataunderlag

För att genomföra de analyser och utvärderingar som krävs för att besvara de sju forskningsfrågorna har två typer av dataunderlag använts, ett teoretiskt genererat och ett från fyra olika fallföretag. I båda fallen omfattar dataunderlaget främst data i form av efterfrågan, orderstorlekar och ledtider. Syftet med att använda teoretiskt genererad data är att man kan uppnå större kontroll över datamaterialets karaktär och därigenom lättare och säkrare kunna identifiera samband och dra slutsatser än om datamaterial från fallfö-

retag används. Syftet med faktiska data från fallföretag är i stället, dels att kunna illustrera, dels verifiera de resultat som uppnått från det teoretiskt genererade datamaterialet.

Den teoretiskt genererade efterfrågan har den skapats genom att kombinera slumpmässigt bestämda orderkvantiteter med slumpmässigt bestämda antal kundorder per dag för att den skall bli så verklighetsnära som möjligt. Poissonfördelning har valts för att generera antal kundorder per dag och rektangelfördelning för att bestämma kundorderstorlekar. Empiriska bevis för att kundorder i huvudsak erhålls slumpmässigt och därmed är en Poissonprocess har påvisats av Johnston och Boylan (1996). Fem olika efterfrågestrukturer har skapats, en med 10 kundorder per dag, en med 3 kundorder per dag, en med 1 kundorder per 2 dagar, en med 1 kundorder per 2 veckor och en med 1 kundorder per 2 månader i medeltal. Orderkvantiteten har för samtliga kundorder satts till mellan 1 och 10 styck. Detta medför att medelefterfrågan per månad (i den här studien betraktad som 20 dagar lång) för de fem efterfrågestrukturerna blir 1.100 styck, 330 styck, 55 styck, 11 styck respektive 3 styck. För varje efterfrågestruktur har 6000 dagars efterfrågan motsvarande 25 år genererats för vardera tjugo artiklar. Genereringen har genomförts med hjälp av Excel.

För att verifiera att den genererade efterfrågan är slumpmässig har den testats med avseende på förekomst av autokorrelation. Autokorrelation definieras av Hanke och Reitsch (1989, sid 144) som *the extent to which a time series variable, lagged one or more periods, is correlated with itself*. En korrelationskoefficient i närheten av 0 innebär att det inte finns något samband mellan efterfrågan i en period och efterfrågan i följande period och därmed att efterfrågan varierar slumpmässigt från period till period. Förekomst av korrelation har testats med avseende på samband mellan efterfrågan i på varandra följande månader. I inget fall blev korrelationskoefficienten större än 0,01.

Fem olika ledtider för återanskaffning, 2, 5, 10, 20 och 40 dagar långa, har använts. Vidare har tre olika storlekar på inleveransorder använts, kvantiteter motsvarande 5, 20 respektive 60 dagars medelefterfrågan. Variationskoefficienter för de olika efterfrågestrukturerna och ledtiderna visas i tabell 1. Som framgår av tabellen täcker den teoretiskt genererade efterfrågan ett brett spektrum av efterfrågeförhållanden.

Tabell 1 Efterfrågekaraktistik för de olika testade efterfrågescenarierna

Efterfrågestruktur	Antal order och orderstorlek	Ledtid				
		2 dagar	5 dagar	10 dagar	20 dagar	40 dagar
1	10 order/dag 1 ñ 10 st/order	0,25	0,16	0,11	0,08	0,06
2	3 order/dag 1 ñ st/order	0,46	0,29	0,21	0,15	0,10
3	1 order/2dagar 1 ñ 10 st/order	1,13	0,72	0,51	0,36	0,25
4	1 order/2 veckor 1 ñ 10 st/order	2,53	1,60	1,13	0,80	0,57
5	1 order/2 månader 1 ñ 10 st/order	5,19	3,28	2,32	1,64	1,16

Efterfrågehistorik har erhållits från ett lager i tre olika företag och från två lager i ett företag. Samtliga fallföretag är stora internationellt verksamma verkstadsföretag. Antalet artiklar som analyserats har varit 250 stycken för fyra av lagren och 205 från det femte. De fyra företagens lager kan kort beskrivas enligt följande.

Företag Aös lager är ett reservdelslager. Utöver unika reservdelar lagerförs också reservdelskit. Totalt finns det storleksordningen 10.000 artiklar i lagret, egentillverkade såväl som inköpta från utomstående leverantörer. Lagret försörjer dels slutkunder på den Europeiska marknaden och dels ett regionalt lager i Sydostasien och ett i Nordamerika.

Lagret hos företag B innehåller enbart färdigvaror, varav 90 % är egentillverkade. Sammanlagt lagerhålls storleksordningen 700 artiklar. Lagret är ett centrallager som försörjer 15 lokala lager med drygt 200 av artiklarna. Det försörjer även slutkunder i Norden samt distributörer i Östeuropa och Afrika med dessa 200 artiklar samt dessutom övriga 500.

Från företag C har två olika lager ingått i studien. Båda avser färdigprodukter av vilka cirka 85 % är egentillverkade. I lager C1 finns storleksordningen 2.500 artiklar och i lager C2 storleksordningen 1.500 artiklar. Lager C1 försörjer både andra lokala lager i Europa och en lokal marknad medan lager C2 endast försörjer kunder på en lokal marknad.

Företag Dös lager utgör ett virtuellt lager bestående av summan av lagertillgångar i tre regionala lager, ett i Europa, ett i Sydostasien och ett i Nordamerika. De lagerpåfyllnadsorder som skapas vid lagerstyrningen baseras på den sammanlagda efterfrågan på samtliga marknader. Vid leverans från produktionen fördelas tillverkade kvantiteter till de olika regionala lagren i proportion till den aktuella behovssituationen. Det lagerförda sortimentet är slutprodukter och består av över 20.000 egentillverkade artiklar.

För att karakterisera lagerstyrningssituationen för de fem lagren från de fyra fallföretagen har företagens respektive artiklar klassificerats i tre olika dimensioner. En klassificering avser hur många kundorderrader som levereras per period. Alternativt kan man tala om antal plock per dag och en uppdelning av artiklarna i rörlighetsklasser. För varje företag och lager har en uppdelning i fyra olika rörlighetsklasser gjorts. Uppdelningen är individuell för varje lager och har gjorts så att artiklarna blir rimligt jämt fördelade mellan klasserna. Denna uppdelning i rörlighetsklasser och antal artiklar tillhörande varje rörlighetsklass redovisas i tabell 2. I tabellen avser intervall det antal leveranser per år inom vilket en viss artikel skall levereras för att tillhöra rörlighetsklassen.

Tabell 2 Uppdelning av artiklar från de fyra fallföretagen i rörlighetsklasser

<i>Företag</i>	<i>Rörlighetsklass</i>	<i>Intervall</i>	<i>Antal artiklar</i>
A	1	> 250	64
	2	100 ñ 250	64
	3	40 ñ 100	60
	4	< 40	62
B	1	> 250	67
	2	100 ñ 250	65
	3	40 ñ 100	60
	4	< 40	58
C1	1	> 60	50
	2	30 ñ 60	31
	3	10 ñ 30	57
	4	< 10	67
C2	1	> 150	28
	2	50 ñ 150	85
	3	20 ñ 50	70
	4	< 20	67
D	1	> 250	56
	2	100 ñ 250	55
	3	40 ñ 100	46
	4	< 40	93

En andra klassificering avser uppdelning av artiklar i ledtider för återanskaffning. Uppdelningen i ledtidsklasser är gemensam för samtliga företag och lager. De olika ledtidsklasserna och antalet artiklar tillhörande varje ledtidsklass visas i tabell 3. Ledtidsklasserna definieras på följande sätt; klass 1 för ledtider mindre än 5 dagar, klass 2 för ledtider mellan 5 och 10 dagar, klass 3 för ledtider mellan 10 och 20 dagar samt klass 4 för ledtider större än 20 dagar. Som framgår av tabellen har företagen A och D förhållandevis längre ledtider än de övriga.

Tabell 3 Uppdelning av artiklar från de fyra fallföretagen i ledtidsklasser

<i>Företag</i>	<i>Ledtidsklass</i>	<i>Antal artiklar</i>
A	1	0
	2	16
	3	62
	4	172
B	1	43
	2	185
	3	22
	4	0
C1	1	120
	2	69
	3	15
	4	1
C2	1	250
	2	0
	3	0
	4	0
D	1	0
	2	5
	3	14
	4	231

Tabell 4 Uppdelning av artiklar från de fyra fallföretagen i inleveransklasser

<i>Företag</i>	<i>Inleveransklass</i>	<i>Antal artiklar</i>
A	1	21
	2	89
	3	138
	4	2
B	1	75
	2	55
	3	92
	4	28
C1	1	35
	2	57
	3	109
	4	4
C2	1	132
	2	67
	3	51
	4	0
D	1	1
	2	8
	3	103
	4	138

Ett ytterligare sätt att klassificera artiklarna i fallföretagen avser storleken på inleveransorder för att fylla på lagret. För att få en jämförbarhet mellan olika artiklar och företag har kvantiteter på inleveransorder uttryckts i antal dagar vid medelefterfrågan som en inleverans täcker, dvs som en täcktid. De olika inleveransklasserna och antalet artiklar tillhörande varje klass redovisas i tabell 4. De definieras på följande sätt; klass 1 för mer än 12 inleveranser per år, klass 2 för mellan 6 och 12 inleveranser per år, klass 3 för mellan 2 och 6 inleveranser per år samt klass 4 för mindre än 2 inleveranser per år.

I avsnitt 3 redovisades några olika i litteraturen publicerade kriterier för att bedöma om en efterfrågefördelning kan betraktas som normalfördelad eller Poissonfördelad. Efterfrågehistoriken från fallföretagen har testats med avseende på dessa kriterier. För att betraktas som normalfördelning har kriteriet medelvärde > 2 standardavvikelser valts. Motsvarande kriterium för Poisson fördelning har valts så att efterfrågans medelvärde och standardavvikelse högst får skilja sig med 10 % av efterfrågans medelvärde. Baserat på normalfördelningskriteriet framgår andelen artiklar per rörlighetsklass och totalt som uppfyller normalfördelningskriteriet av tabell 5. I tre av företagen är det en försumbar andel artiklar som uppfyller normalfördelningskriteriet medan det är storleksordningen 50 % för de övriga två. En huvudorsak till detta kan vara att ledtiderna i de företag för vilka en stor andel artiklar uppfyller normalfördelningskriteriet har klart längre ledtider än artiklarna i de företag som har en liten andel önormalfördelningsartiklar.

Tabell 5 Andel artiklar per rörlighetsklass och totalt som uppfyller kriterium för att vara normalfördelade

<i>Rörlighets klass</i>	<i>Företag A</i>	<i>Företag B</i>	<i>Företag C1</i>	<i>Företag C2</i>	<i>Företag D</i>
1	100 %	30 %	8 %	36 %	100 %
2	70 %	5 %	0 %	0 %	89 %
3	15 %	0 %	0 %	0 %	35 %
4	0 %	0 %	0 %	0 %	1 %
Totalt	47 %	9 %	2 %	4 %	49 %

Motsvarande andel artiklar som uppfyller Poissonfördelningskriteriet redovisas i tabell 6. Det är uppenbarligen ännu färre artiklar som uppfyller kriteriet att vara Poissonfördelade. Endast storleksordningen 10 % av artikelsortimentet för samtliga fallföretag.

Tabell 6 Andel artiklar per rörlighetsklass och totalt som uppfyller kriterium för att vara Poissonfördelade

<i>Rörlighets klass</i>	<i>Företag A</i>	<i>Företag B</i>	<i>Företag C1</i>	<i>Företag C2</i>	<i>Företag D</i>
1	0 %	1 %	22 %	7 %	0 %
2	5 %	23 %	19 %	24 %	0 %
3	12 %	15 %	0 %	14 %	2 %
4	24 %	0 %	0 %	3 %	23 %
Totalt	10 %	10 %	10 %	14 %	9 %

4.2 Simulerings- och utvärderingsmetodik

I modellen simuleras dagliga uttag, kontroll av beställningspunkter, utläggning av nya lagerpåfyllnadsorder, inleveranser samt uppdateringar av saldo och disponibelt saldo. Konsekvenser av typ bristkvantiteter och erhållna servicenivåer beräknas månadsvis.

Som lagerstyrningsmodell vid simuleringskörningarna har ett beställningspunktssystem av typ periodinspekterat (s,S)-system använts (Silver-Pyke-Peterson, 1998, sid 238). Eftersom beställningspunkten i ett sådant system jämförs periodisk med det disponibla saldot och i det här fallet dagligen är periodlängden en dag och ledtiderna har därför ökat med en halv dag vid beräkning av standardavvikelse, säkerhetslager och beställningspunkter. Nya beställningspunkter beräknas vid varje månadsskifte. Förbrukningen under ledtid prognostiseras med hjälp av glidande medelvärdeметоден med tolv månadsvärden och den standardavvikelse som ligger till grund för säkerhetslagerberäkningen beräknas med utgångspunkt från efterfrågan per dag ett år tillbaka i tiden. Beräkningarna baseras på användning av fyllnadsgrad som servicenivåbegrepp, dvs servicenivån definieras som andelen av efterfrågan som kan tillfredsställas direkt från lager. Uppkomna brister antas restnoteras för senare leverans.

Att (s,S)-system valts i stället för (s,Q)-system har gjorts för att kunna hantera de mest lågomsatta och lågrörliga efterfrågestrukturerna. Om fast orderstorlek skulle valts med den låga medelefterfrågan det är fråga om för dessa strukturer samtidigt som enstaka kundorder kan avse stora kvantiteter skulle åtskilliga inleveransorder i tät följd behöva ha genererats för att täcka behov från redan inkomna order. För efterfrågestrukturer med små efterfrågevariationer blir skillnaden mellan de båda typerna av system försumbara. S har beräknats som beställningspunkten plus den inleveranskvantitet som valts för de teoretiskt genererade efterfrågefallen och respektive den orderkvantitet som fallföretagen använt för respektive artikel.

För att jämföra alternativa beräkningssätt och parametersättningar har parvisa jämförelser tillämpats. Eftersom antalet observationer vid dessa jämförelser i de flesta fall varit tämligen begränsat, oftast av storleksordningen 20 stycken för den teoretiskt genererade efterfrågan, har t-fördelningen använts för att signifikant testa skillnader.

5 Resultat och analyser från jämförelser mellan empirisk fördelning och normalfördelning

De erhållna resultaten från beräkningar och jämförelser mellan att beräkna beställningspunkter baserat på empirisk fördelning och på normalfördelning per efterfrågestruktur och ledtid för den teoretiskt genererade efterfrågan redovisas i tabell 7. Differenserna avser procentenheter för medelservicenivåer och för standardavvikelse för variationer i servicenivåer. Fetstil betecknar att differensen är statistiskt signifikant på 0,5%-nivån.

Tabell 7 Medelservicenivåer och skillnader i procentenheter mellan servicenivåer erhållna från empirisk fördelning och normalfördelning för den teoretiskt genererade efterfrågan

Ledtid	Efterfrågestruktur	Medelservicenivå		Differenser	
		Empirisk fördelning	Normalfördelning	Medelvärden	Standardavvikelser
2 dagar	1	97,7	97,8	-0,1	0,0
	2	97,5	97,5	0,0	0,0
	3	96,5	96,0	0,6	-0,2
	4	94,8	89,8	5,0	-1,6
	5	90,7	68,3	22,3	-3,3
5 dagar	1	97,7	97,8	-0,1	0,0
	2	97,7	97,6	0,1	0,0
	3	96,8	96,3	0,5	-0,3
	4	95,3	91,8	3,5	-1,5
	5	94,6	79,3	15,3	-5,6
10 dagar	1	97,7	97,8	-0,1	-0,1
	2	97,6	97,6	0,0	-0,1
	3	96,6	96,4	0,3	-0,2
	4	95,4	93,3	2,1	-1,2
	5	94,4	86,4	8,1	-4,7
20 dagar	1	97,5	97,7	-0,2	0,1
	2	97,2	97,5	-0,3	0,1
	3	96,2	96,5	-0,3	0,1
	4	94,5	93,9	0,6	-0,4
	5	92,7	90,3	2,4	-2,2
40 dagar	1	97,0	97,6	-0,6	0,3
	2	96,4	97,3	-0,9	0,5
	3	94,3	96,4	-2,1	1,4
	4	92,4	94,7	-2,3	0,9
	5	90,9	93,4	-2,5	1,5

Av de erhållna resultaten framgår att skillnaderna mellan de servicenivåer som erhålls med hjälp av empirisk fördelning jämfört med normalfördelning är praktiskt sett försumbara och i flertalet fall inte signifikanta på 0,5%-nivån för de efterfrågestrukturer som har lägst efterfrågevariationer. Däremot är skillnaderna stora eller mycket stora för de efterfrågestrukturer som har störst efterfrågevariationer. I praktiskt taget samtliga fall är de dessutom signifikanta. Det kan också konstateras att skillnaderna är större ju kortare ledtiderna är. Detta är helt förväntat eftersom variationskoefficienterna minskar med ökande ledtider. Som framgick av tabell 1 är variationskoefficienterna för efterfrågestruktur 1 och 2 mindre än 0,5 för alla ledtider, för efterfrågestruktur 3 för ledtiderna 10, 20 och 40 dagar och för efterfrågestruktur 4 för ledtiden 40 dagar. För efterfrågestruktur 5 är variationskoefficienten större än 0,5 för samtliga ledtider. Om man kombinerar denna iakttagelse med att kriteriet att variationskoefficienten måste vara mindre än 0,5 för att normalfördelningen skall vara rimligt tillämplig kan man notera en stor överensstämmelse mellan detta kriterium och resultaten i tabell 7. För de efterfrågestrukturer/ledtider som har små variationskoefficienter är med andra ord skillnaderna mellan normalfördelning och empirisk fördelning liten.

Tabell 8 Medelservicenivåer och skillnader i procentenheter mellan servicenivåer erhållna från empirisk fördelning och normalfördelning för den efterfrågehistorik som erhållits från fallföretagen

Företag	Rörlighets-klass	Medelservicenivå		Differenser	
		Empirisk fördelning	Normal-fördelning	Medelvärden	Standard-avvikelser
A	1	96,4	96,8	-0,4	0,1
	2	96,0	96,3	-0,2	0,0
	3	94,3	94,3	0,0	0,0
	4	95,0	93,9	1,1	-0,9
B	1	96,2	95,6	0,6	-0,4
	2	95,7	94,7	1,0	-0,5
	3	95,3	93,5	1,8	-0,9
	4	95,7	91,7	3,8	-3,6
C1	1	96,9	96,6	0,3	-0,1
	2	96,5	94,7	1,7	-0,8
	3	92,2	85,5	6,7	-2,0
	4	92,6	82,8	9,8	-4,3
C2	1	97,5	96,9	0,6	-0,2
	2	97,0	95,1	1,8	-0,8
	3	95,6	91,0	4,6	-1,9
	4	93,9	84,3	9,6	-4,2
D	1	97,3	97,5	-0,2	0,0
	2	96,7	96,8	-0,1	0,1
	3	95,1	95,4	-0,3	0,2
	4	94,6	94,0	0,7	-0,7

Det kan tilläggas att i flertalet fall med små men signifikanta skillnader i erhållna servicenivåer är styrkan i signifikansen svag, dvs t-funktionens värde ligger obetydligt över det kritiska värdet för den aktuella signifikansnivån.

Vid simuleringarna har också skillnader i hur mycket erhållna servicenivåer varierar över tiden studerats. Resultaten från dessa jämförelser kan också utläsas av tabell 7. Det framgår tydligt att variationerna i erhållna servicenivåer är större när man använder normalfördelning än när man använder empirisk fördelning för ledtider upp till om med 20 dagar. För de efterfrågestrukturer som har störst efterfrågevariation är skillnaderna signifikanta och de är ur praktisk synpunkt inte försumbara. Av skäl som inte kan förklaras av den genomförda studien är förhållandena de motsatta för den längsta ledtiden.

Motsvarande resultat från beräkningar och jämförelser mellan att beräkna beställningspunkter baserat på empirisk fördelning och på normalfördelning per rörlighetsklass för den efterfrågehistorik som erhållits från fallföretagen redovisas i tabell 8. Även i det här fallet avser differenserna procentenheter för medelservicenivåer och för standardavvikelser för variationer i servicenivåer. Fetstil betecknar att differensen är statistiskt signifikant på 0,5%-nivån. De förhållanden som kunde identifieras för den teoretiskt genererade efterfrågan gäller i stor utsträckning även för fallföretagens efterfrågan. Detta gäller framför allt att artiklar med stor rörlighet och därmed förhållandevis lägre variationskoefficienter uppvisar små skillnader mellan servicenivå erhållna från empiriska

fördelningar jämfört med normalfördelningar. Förhållandena gäller samtliga företag. I övrigt kan man konstatera att skillnaderna är minst för de företag för vilka andelen artiklar i störst utsträckning uppfyller kriterier för användning av normalfördelning, dvs företag A och D. Se tabell 5. För dessa företag är inte skillnaderna signifikanta för någon rörlighetsklass. För övriga tre företag blir som väntat skillnaderna större ju högre rörlighetsklass artiklarna tillhör, dvs ju mer efterfrågan relativt sett varierar. För de högsta rörlighetsklasserna är skillnaderna genomgående signifikanta och påtagligt stora.

Även resultaten med avseende variationer i erhållna servicenivåer är likartade de som erhöles för den teoretiskt genererade efterfrågan. För företagen med stor andel artiklar som uppfyller normalfördelningskriterierna är skillnaderna små och genomgående inte signifikanta. För övriga tre medför normalfördelningen klart större variationer i erhållna servicenivåer. De är också signifikanta för de högsta rörlighetsklasserna.

6 Resultat och analyser från jämförelser mellan gammafördelning och normalfördelning

Samma typ av beräkningar och jämförelser som mellan empirisk fördelning och normalfördelning har gjorts mellan gammafördelning och normalfördelning. Resultaten för den teoretiskt genererade efterfrågan redovisas i tabell 9. I tabellen avser differenserna procentenheter för medelvärden och standardavvikelser för variationer i servicenivåer. Fetstil betecknar att differensen är statistiskt signifikant på 0,5%-nivån. Anledningen till att uppgifter saknas i efterfrågestruktur 1, ledtid 20 dagar samt i efterfrågestruktur 1 och 2 för ledtiden 40 dagar beror på beräkningstekniska begränsningar i Excel.

Erhållna resultat med avseende på skillnader mellan servicenivåer baserade på gammafördelning jämfört med normalfördelning och skillnader mellan servicenivåer baserade på empirisk fördelning och normalfördelning är principiellt de samma. Även för gammafördelning är skillnaderna praktiskt sett försumbara och i samtliga fall ej signifikanta på 0,5%-nivån för de efterfrågestrukturer som har lägst efterfrågevariationer. På motsvarande sätt som för empirisk fördelning är de däremot stora eller mycket stora för de efterfrågestrukturer som har störst efterfrågevariationer. I samtliga dessa fall är de dessutom signifikanta. Det kan också konstateras att skillnaderna är klart större ju kortare ledtiderna är vilket av samma skäl som för jämförelsen med empirisk fördelning är helt förväntat eftersom variationskoefficienterna minskar med ökande ledtider.

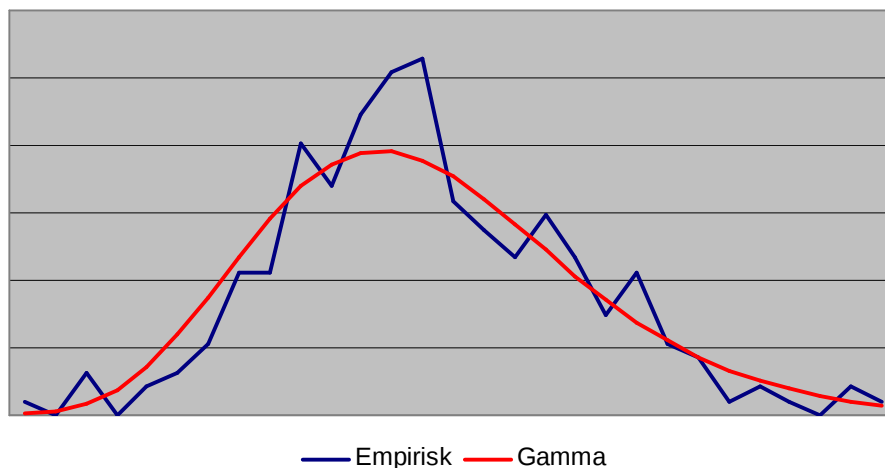
En skillnad jämfört med resultaten för jämförelsen med empirisk fördelning föreligger. I motsats till de servicenivåer som erhålls för empirisk fördelning blir de servicenivåer som erhålls för efterfrågestrukturer med stor efterfrågevariation och långa ledtider klart större om gammafördelningen används, i flertalet fall dessutom högre än den servicenivå på 98 % som lagerstyrningssystemet dimensionerats för. Att så blir fallet torde bero på att gammafördelningens högra svans sträcker sig klar längre bort mot större efterfrågevärden än både den empiriska fördelningen och normalfördelningen. Jämfört med den empiriska fördelningen illustreras detta i figur 3 och 4.

Tabell 9 Medelservicenivåer och skillnader i procentenheter mellan servicenivåer erhållna från gammafördelning och normalfördelning för den teoretiskt genererade efterfrågan

Ledtid	Efterfråge-Struktur	Medelservicenivå		Differenser	
		Gamma-fördelning	Normal-Fördelning	Medelvärden	Standard-avvikelser
2 dagar	1	97,8	97,8	0,0	0,0
	2	97,5	97,5	0,0	0,0
	3	96,9	95,9	1,0	-0,2
	4	95,7	89,8	5,9	-1,9
	5	91,7	68,3	23,4	-3,3
5 dagar	1	97,8	97,8	0,0	0,0
	2	97,7	97,6	0,1	0,0
	3	97,4	96,3	1,0	-0,4
	4	97,4	91,8	5,6	-2,8
	5	96,9	79,3	17,6	-7,6
10 da-gar	1	97,5	97,8	-0,2	0,1
	2	97,7	97,6	0,1	0,0
	3	97,6	96,4	1,3	-0,6
	4	98,0	93,3	4,7	-3,1
	5	98,2	86,4	11,9	-9,6
20 da-gar	1				
	2	97,7	97,5	0,2	-0,1
	3	97,7	96,5	1,2	-0,7
	4	98,3	93,9	4,5	-3,9
	5	98,7	90,3	8,5	-9,2
40 da-gar	1				
	2				
	3	97,5	96,4	1,1	-0,9
	4	98,2	94,7	2,4	-2,4
	5	98,9	93,4	4,7	-7,1

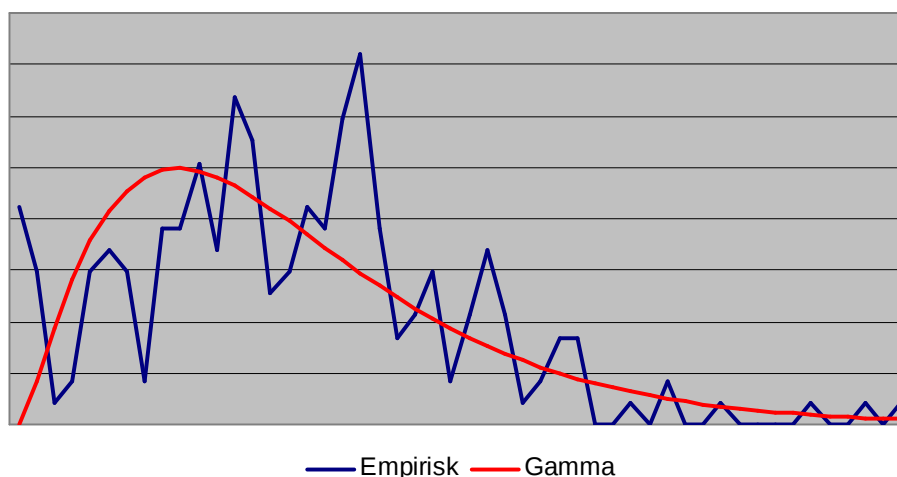
Skillnaderna i hur mycket erhållna servicenivåer varierar över tiden är också principiellt desamma som för jämförelsen mellan empirisk fördelning och normalfördelning vilket framgår av tabell 9. Resultaten visar tydligt att variationerna i erhållna servicenivåer är signifikant större när man använder normalfördelning än när man använder gammafördelning för samtliga ledtider och de tre efterfrågestrukturer med störst efterfrågevariation. För de efterfrågestrukturer som har störst efterfrågevariation är skillnaderna inte försumbara.

För att illustrera hur gammafördelningen ser ut i förhållande till den empiriska fördelningen har grafer över respektive fördelningsfunktion tagits fram. Exempel på sådana visas i figur 3, 4 och 5 för efterfrågestruktur 2, 3 respektive 4 och ledtider på 5 dagar.



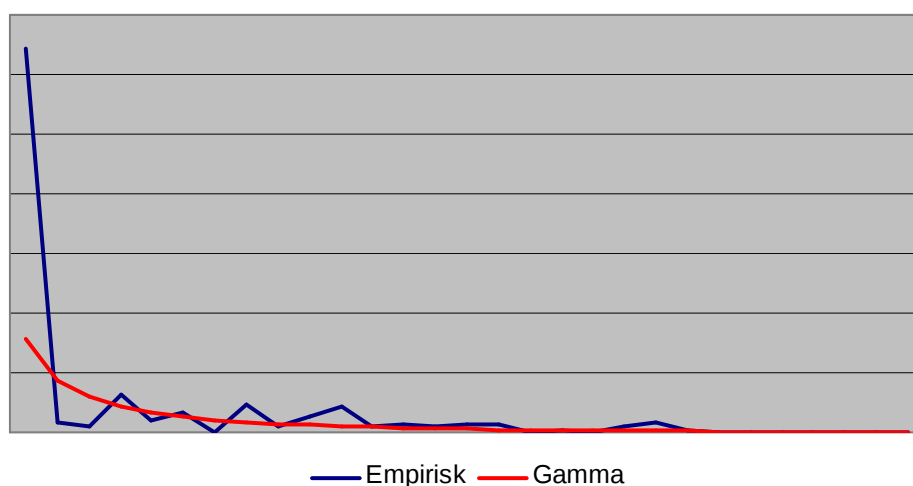
Figur 3 Utseende på den empiriska frekvensfunktionen och gammafördelningens frekvensfunktion (den jämna linjen) för efterfrågestruktur 2 med 3 order per dag.

Som framgår av figurerna är gamma funktionen mycket lik normalfördelningsfunktionen vid låga efterfrågevariationer, som en önsad normalfördelning vid lite högre efterfrågevariationer och som en Poissonliknande fördelning vid höga efterfrågevariationer.



Figur 4 Utseende på den empiriska frekvensfunktionen och gammafördelningens frekvensfunktion (den jämna linjen) för efterfrågestruktur 3 med 1 order per 2 dagar.

Figurerna visar också att det finns en god överensstämmelse mellan den empiriska fördelningens frekvensfunktion och gammafördelningens frekvensfunktion, speciellt för fallen med lägre efterfrågevariationer. För fallet med endast 1 order per två veckor och som en konsekvens hög efterfrågevariation blir frekvensfunktionen för gammafördelningen lägre än motsvarande för den empiriska efterfrågefördelningen för låga efterfrågevärden. Detta beror på att andelen ledtidsefterfrågeintervall med ingen efterfrågan är mycket större än vad gammafördelningen ger. I stället täcker gammafördelningen betydligt större ledtidsefterfrågevärden än den empiriska efterfrågefördelningen (framgår delvis av figur 5). Förhållandet leder till att gammafördelningen ger något för stora beställningspunkter och därmed för höga servicenivåer vilket också framgår av tabell 9.



Figur 5 Utseende på den empiriska frekvensfunktionen och gammafördelningens frekvensfunktion (den jämna linjen) för efterfrågestruktur 4 med 1 order per 2 veckor.

Tabell 10 Skillnader i procentenheter mellan servicenivåer erhållna från gammafördelning och normalfördelning för den efterfrågehistorik som erhållits från fallföretagen

Företag	Rörlig- hets- klass	Medelservicenivå		Differenser	
		Gamma- fördelning	Normal- fördelning	Medelvärden	Standard- Avvikelser
A	1	97,5	96,9	0,7	-0,4
	2	97,3	96,3	1,1	-0,8
	3	96,8	94,3	2,5	-2,0
	4	98,3	93,9	4,4	-5,2
B	1	97,4	95,8	1,6	-0,6
	2	96,6	94,7	2,0	-1,0
	3	96,2	93,7	2,4	-1,5
	4	95,2	91,8	3,3	-3,4
C1	1	96,9	96,3	0,6	-0,3
	2	96,5	94,7	1,8	-0,8
	3	92,3	85,2	7,1	-2,1
	4	92,6	82,0	10,6	-4,5
C2	1	97,8	96,9	0,9	-0,3
	2	97,7	95,2	2,6	-1,0
	3	96,5	91,1	5,5	-2,3
	4	94,7	84,3	10,4	-4,6
D	1	97,7	97,4	0,2	0,0
	2	97,5	97,1	0,3	-0,2
	3	97,2	95,6	1,6	-1,3
	4	96,7	94,3	2,4	-4,1

Jämförelser mellan gammafördelning och normalfördelning med avseende på den efterfrågehistorik som erhållits från fallföretagen framgår av tabell 10¹. I tabellen avser differenserna procentenheter för medelservicenivåer och standardavvikelser för variationer i servicenivåer. Fetstil betecknar att differensen är statistiskt signifikant på 0,5%-nivån.

För praktiskt taget samtliga företag och rörlighetsklasser ger gammafördelningen upphov till signifikant högre erhållna servicenivåer än normalfördelningen. Likaså ger gammafördelningen praktiskt taget genomgående upphov till signifikant mindre variationer i erhållna servicenivåer jämfört med normalfördelningen. Skillnaderna både med avseende på medelvärden och variationer i erhållna servicenivåer är i merparten av fallen större för de företag för vilka andelen artiklar vars efterfrågan uppfyller kriteriet för att kunna använda normalfördelningen är hög. Detta är förväntat av motsvarande skäl som för jämförelsen mellan empirisk fördelning och normalfördelning.

7 Resultatsammanfattning och slutsatser

För att kunna dimensionera beställningspunkter och säkerhetslager med utgångspunkt från en önskad servicenivå är det nödvändigt, dels att kunna karakterisera hur efterfrågan varierar och dels att kunna beräkna ett mått på variationernas storlek i form av dess standardavvikelser. Traditionellt har det förstnämnda problemet lösts genom att man antar att efterfrågevariationerna följer någon form av standardiserad efterfrågefördelning. Vid tillämpningar i företag har det nästan uteslutande rört sig om att basera säkerhetslagerberäkningarna på normalfördelningar. I några fall förekommer det också att Poissonfördelningar används, speciellt vid lagerstyrning av reservdelar.

Det är emellertid inte särskilt självklart att verkliga efterfrågefördelningar på ett acceptabelt sätt motsvarar vare sig normalfördelningen eller Poissonfördelningen. Speciellt kan detta för normalfördelningen ifrågasättas för lågrörliga artiklar med ojämna efterfrågemönster och för Poisson fördelningen om uttagen från lager inte rör sig om storleksordningen ett par styck åt gången. Det är därför av intresse att studera och utvärdera i vilken utsträckning andra fördelningar på ett bättre sätt kan representera verklighetens efterfrågemönster. I det projekt som redovisas i den här rapporten har användning av gammafördelning och empirisk fördelning analyserats och utvärderats i förhållande till normalfördelning. Resultat och slutsatser från dessa analyser summeras nedan.

Från de resultat som erhållits i studien framgår att skillnaderna mellan de servicenivåer som erhålls med hjälp av empirisk fördelning jämfört med normalfördelning är praktiskt sett försumbara vid låga efterfrågevariationer. Däremot är skillnaderna stora eller mycket stora för de fall som har störst efterfrågevariationer. För dessa fall blir erhållna servicenivåer klart högre om man vid säkerhetslagerberäkningen utgår från empirisk fördelning. Empirisk fördelning ger också upphov till servicenivåer som i större utsträckning står i överensstämmelse med önskade servicenivåer. Skillnaderna är större ju kortare ledtiderna är.

¹ På grund av beräkningstekniska begränsningar i Excel har simuleringar för några artiklar inte kunnat utföras. Dessa artiklar har därför uteslutits. De uteslutna artiklarna har mycket få kundorder per tidsenhet och varje kundorder avser stora kvantiteter.

De erhållna resultaten visar också att variationerna i erhållna servicenivåer blir större om man använder normalfördelning vid ledtider kortare än 20 dagar och för efterfrågefall med stora efterfrågevariationer jämfört med om man använder empirisk fördelning. För längre ledtider är förhållandena de motsatta.

Motsvarande resultat med avseende på skillnader mellan servicenivåer baserade på gammafördelning respektive baserade på normalfördelning är principiellt lika de som identifierades mellan servicenivåer baserade på empirisk fördelning och normalfördelning. Även för gammafördelning är skillnaderna praktiskt sett försumbara för de efterfrågefall som har lägst efterfrågevariationer. De är däremot stora eller mycket stora för de efterfrågefall som har störst efterfrågevariationer. För dessa fall ger gammafördelningen högre servicenivåer än normalfördelning och den ger också upphov till servicenivåer som i större utsträckning står i överensstämmelse med önskade servicenivåer. Skillnaderna är klart större ju kortare ledtiderna.

Skillnaderna i hur mycket erhållna servicenivåer varierar över tiden är också principiellt desamma som vid jämförelsen mellan empirisk fördelning och normalfördelning, dvs skillnaderna i variationer för erhållna servicenivåer blir större när man använder normalfördelning än när man använder gammafördelning för samtliga ledtidsalternativ och för de efterfrågefall som uppvisar störst efterfrågevariation.

Från de erhållna resultaten kan följande allmänna slutsatser dras med utgångspunkt från att med hjälp av respektive fördelning uppnå en servicenivå som så nära som möjligt motsvarar den önskade och som lagerstyrningssystemet dimensionerats för.

För efterfrågefall med variationskoefficienter mindre än 0,5 är de tre studerade metoderna praktiskt sett likvärdiga ur styrningssynpunkt.

För efterfrågefall med variationskoefficienter större än 0,5 är både den empiriska fördelningen och gammafördelning att föredra jämfört med normalfördelning. Ju mer efterfrågan varierar och ju längre ledtiderna är desto bättre resultat erhålls med gammafördelning jämfört med empirisk fördelning.

Om man föredrar att använda sig av en enda fördelning är gammafördelningen att föredra.

Referenser

Banerjee, R. & Burton, J. & Banerjee, A. (2003) A simulation study of lateral shipments in single supplier multiple buyers supply chain networks, International Journal of Production Economics, Vol. 81-82, sid 103-114.

Bookbinder, J. & Lordahl, A. (1989) Estimation of inventory re-order levels using the bootstrap statistical procedure, IIE Transactions, December, sid 302 & 312.

Brown, R. (1963) Smoothing, forecasting and prediction of discrete time series, Prentice-Hall.

Burgin, R. (1975) The gamma distribution and inventory control, Operational Research Quarterly, Vol. 26 No. 3, sid 507-525.

Burgin, T. & Norman, J. (1976) A table for determining the probability of a stock out and potential lost sales for a gamma distributed demand, Operational Research Quarterly, Vol. 27 No. 3, sid 621-631.

Delurgio, S. - Bhamed, C. (1991) Integrating forecasts and inventory management of low-volume demands, APICS's Conference Proceedings, sid 589 & 593.

Fagan, M. (1984) Determination of safety stock: A practical approach for service industries. APICS conference proceedings, sid 84 & 88.

Fortuin, L. (1980) Five popular probability density functions: A comparison in the field of stock-control models, Journal of the Operational Research Society, Vol. 31 No. 10, sid 937 & 942.

Ganeshan, R. & Boone, T. & Stenger, A. (2001) The impact of inventory and flow planning parameters on supply chain performance: an explorative study, International Journal of Production Economics, Vol. 71, sid 111-118.

Hax, A. & Candea, D. (1984) Production and inventory management, Prentice-Hall.

Hong-Minh, S. & Disney, S. & Naim, M. (2000) The dynamics of emergency shipment supply chains, International Journal of Physical Distribution & Logistics Management, Vol. 30 No. 9, sid 788-816.

Huq, F. (2006) Simulation study of a two-level warehouse inventory replenishment system, International Journal of Physical Distribution & Logistics Management, Vol. 36 No. 1.

Keaton, M. (1995) Using the gamma distribution to model demand when lead times are random, Journal of Business Logistics, Vol. 16 No. 1.

Lau, H-S. (1989) Toward an inventory control system under non-normal demand and lead-time uncertainty, Journal of Business Logistics, Vol. 10 No. 1, sid 88 & 103.

Mattsson, S-A. (2003) Efterfrågefördelning vid bestämning av beställningspunkter och säkerhetslager, Intern forskningsrapport, Institutionen för Teknisk ekonomi och logistik, Lunds Universitet.

Mattsson, S-A. (2007) Beräkning av standardavvikelser för dimensionering av säkerhetslager, Intern forskningsrapport, Institutionen för Teknisk ekonomi och logistik, Lunds Universitet.

Moors, J. & Stribosch, L. (2004) Exact fill rates for (R,s,S) inventory control with gamma distributed demand pattern, Journal of the Operational Research Society, Vol. 53, sid 1268-1274.

- Naddor, E. (1978) Sensitivity to distributions in inventory systems, *Management Science*.
- Olhager, J. ñ Persson, F. (2006) Simulating production and inventory control systems: a learning approach to operational excellence, *Production Planning & Control*, Vol. 17 No. 2.
- Razi, M. ñ Tarn, M. (2003) An applied model for improving inventory management in ERP systems, *Logistics Information Management*, Vol. 16 No 2.
- Schönsleben, P. (2004) *Integral logistics management*. St Lucie Press.
- Silver, E. ñ Peterson, R. (1985) *Decision systems for inventory management and production planning*, John Wiley & Sons.
- Smart, C. ñ Willemain, T. (2000) A new way to forecast intermittent demand, *The performance Advantage*, Juni, sid 64 ñ 68.
- Smart, C. (2002) Accurate intermittent demand/inventory forecasting: New technologies and dramatic results, *APICS International Conference Proceedings*.
- Småros, J. ñ Lehtonen, J. ñ Appelqvist, P. ñ Holmström, J. (2003) The impact of increasing demand visibility on production and inventory control efficiency. *International Journal of Physical Distribution & Logistics Management*, Vol. 33 No. 4, sid 336-354
- Strijbosch, L. ñ Moors, J. (2006) Modified normal demand distributions in (R,S)-inventory control. *European Journal of Operational Research*, 172, sid 201-212.
- Wilcox, J. (1970) How to forecast lumpy items, *Production and Inventory Management*, 1st Qtr, sid 51 ñ 54 .
- Wilkinson, S. (1996) Service level and safety stock based on probability, *Control*, April, sid 23 ñ 25.
- Willemain, T. ñ Smart, C. ñ Schwarz, H. (2004) A new approach to forecasting intermittent demand for service parts inventories, *International Journal of Forecasting*, Vol. 20, Sid 375-387.
- Yeh, Q. (1997) A practical implementation of gamma distribution to the reordering decision of an inventory control problem, *Production and Inventory Management Journal*, 1st Qtr, sid 51 ñ 57 .
- Zotteri, G. (2000) The impact of distributions of uncertain lumpy demand on inventories, *Production Planning & Control*, Jan ñ Feb, sid 32 ñ 43.